Ω univers, $A \subset \Omega$ événement,

"Card (A)" le nombre d'éléments de A.

Lorsque Ω est fini, le dénombrement permet de compter les possibilités pour un événement donné. Ω univers,

Propriétés :

- $A \subset B$, $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.
- $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- $\text{Card}({}^cA) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(A)$.
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}\, A \times \text{Card}(B)$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Principe de dénombrement : Idée. "si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et On peut subdiviser un événement A en deux tâches A_1 et A_2, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2)$."

$A \rightsquigarrow T_1 \times T_2 \times \dots T_n$

$\text{Card}(A) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}(T_i)$.

Principe de Dénombrement : Si $A \simeq A_1 \times \dots A_n$, alors, $\text{Card}(A) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$.

Exemples : On veut construire un code PIN.

Ex I)

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$

10 9 8 7

1- Combien j'ai de possibilité ? On a 10^4 possibilité.

2 - Combien j'ai de possibilité d'obtenir un code PIN avec aucun numéro répété ?

On a $10 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilité, $10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$ "A^4_{10}"

On note $A^k_n = \frac{n!}{(n-k)!}$

3 - Combien j'ai de Possibilité d'obtenir un code PIN avec que des nombres ? On a 5^4.

0
2
4
6
8

Ex II

Dans une "banc Online", On vous demande de taper un mot qu'on vous a confié lors de l'inscription. Sachant que le mot a 8 alphabet. et qu'il contient une lettre repetée 3 fois.

26 26 26 26

1 - Mot composé de 8 alphabets : 26^8.

T_1 - choisir un alphabet, 26 choix.

T_2 - choisir 3 places parmi 8. $\frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = \frac{A^3_8}{3!} = C^3_8$

T_3 - Completer les autres case par d'autre alphabets. (25^5)

$8 \times 7 \times 6 / 3!$

On note : $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

Réponse pour Ex IV : $\text{Card}(T_1) \cdot \text{card}(T_2) \cdot \text{card}(T_3) = 26\, C_8^3\, 25^5$.

$\bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc$

100

10^6 DH

$100^9 = 10^{18}$

$\dfrac{1}{10^{18}}$ chance de gagner. 50 DH.

$\boxed{\text{Ex 3}}$

C_n^k

Enoncé

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. contenant 2 carreaux et 3 piques.
4. contenant au moins un roi.
5. contenant au plus un roi.
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

K K K K

♥ ♦ ♣ ♠

1- Ω " Tirer 5 cartes ". $\text{Card}(\Omega) = C_{32}^5$.

C_8^5 C_8^5

2- A " 5 carreaux ou 5 piques ".

ou $\longleftrightarrow$ +

et $\longleftrightarrow$ ×

$\text{Card}(A) = 2 \cdot C_8^5$.

C_8^2 C_8^3

3- B " 2 carreaux et 3 piques ", $\text{Card}(B) = C_8^2 \times C_8^3$.

Méthode ①

4- C " Au moins un roi ", $\text{Card}(C) = C_4^1 \times C_{31}^4 = 4 \times C_{31}^4$.

4- C " Au moins un roi ", $Card(C) = C^1_4 \times C^4_{31} = 4 \times C^4_{31}$.

" roi pique ou roi carreau ou roi coeur ou trèfle "

$$C^4_{31} + C^4_{31} + C^4_{31} + C^4_{31}$$

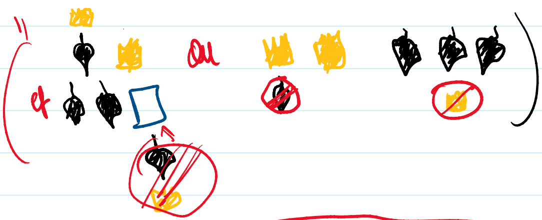
Méthode (2) : $\bar{C}$ = " sans roi ", $Card(\bar{C}) = C^5_{28}$.

donc $Card(C) = C^5_{32} - C^5_{28}$.

5- D = " Au plus un roi " . $Card(D) = C^5_{28} + C^1_4 \times C^4_{28}$

0 ou 1

6- E " Exactement deux rois et exactement 3 piques " : $Card(E) = C^1_3\, C^2_7\, C^1_{21} + C^2_3\, C^3_7$.



Résumé : $\boxed{\text{Principe de Dénombrement}}$

- Tirage de k parmi n avec ordre et répétition : n^k.
- Tirage de k parmi n avec ordre sans répétition : A^k_n
  (successivement) (Arrangement).
- Tirage de k parmi n sans ordre, sans répétition : C^k_n
  (simultanément) (Combinaisons).
- Tirage de n parmi n avec ordre, sans répétition : $n!$
  (Permutation).