

Exercice II : Soit la forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 7z^2 + 2xy + 2xz + 6yz.$$

- Déterminer  $A$  la matrice de la forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique et donner  $\phi$  la forme bilinéaire associée.
- Décomposer  $q$  en sommes des carrés des formes linéaires  $l_1, l_2$  et  $l_3$  et vérifier que  $(l_1, l_2, l_3)$  est une base de  $(\mathbb{R}^3)^*$ .
- Déterminer le rang et la signature de cette forme quadratique et déduire que  $\phi$  est positive et définie positive ( $\phi$  est un produit scalaire).
- Déterminer une base  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $(l_1, l_2, l_3)$  est base duale.
- Calculer  $\langle f_i, f_j \rangle$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), puis déterminer la matrice de  $q$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' + 7zz' + (xy' + x'y) + (xz' + x'z) + 3(yz' + y'z)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad q(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 7z^2 + 2xy + 2xz + 6yz \\ &= x^2 + 2x(y+z) + (y+z)^2 + y^2 + 6z^2 + 4yz \\ &= (x+y+z)^2 + y^2 + 4yz + (2z)^2 + 2z^2 \\ &= (x+y+z)^2 + (y+2z)^2 + 2z^2 \\ &= l_1(x, y, z)^2 + l_2(x, y, z)^2 + 2l_3(x, y, z)^2 \end{aligned}$$

avec  $l_1(x, y, z) = x + y + z$

$l_2(x, y, z) = y + 2z$

$l_3(x, y, z) = z$

$l_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$

$l_2 = e_2^* + 2e_3^*$

$l_3 = e_3^*$

donc  $(l_1, l_2, l_3)$  est libre et par suite c'est une base de  $(\mathbb{R}^3)^*$

3) On a  $\text{Sgn}(q) = (3, 0)$  et  $\text{rg}(q) = 3$  donc  $\phi$  est définie positive c-à-d produit scalaire

3) on pose  $u_1 = l_1(x, y, z) = x + y + z$   $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2) On pose  $U_1 = L_1(x, y, z) = x + y + z$   $\langle U_1, U_1 \rangle = 1$   $\langle U_1, U_2 \rangle = 0$

$U_2 = L_2(x, y, z) = y + 2z$   $U_2 - U_3 = y + z$

$U_3 = L_3(x, y, z) = z$

donc 
$$\begin{cases} x = U_1 - U_2 + U_3 \\ y = U_2 - 2U_3 \\ z = U_3 \end{cases} \quad \text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $f_1 = c_1 = (1, 0, 0)$ ;  $f_2 = c_2 = (-1, 1, 0)$ ;  $f_3 = c_3 = (1, -2, 1)$

⇐ vérification  $e_i(f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow$

5)  $\langle f_1, f_1 \rangle = \phi(f_1, f_1) = q(f_1) = \overbrace{L_1(f_1)}^{1 \cdot 1}^2 + \overbrace{L_2(f_1)}^{1 \cdot 0}^2 + 2 \overbrace{L_3(f_1)}^{1 \cdot 0}^2 = 1$

de même  $\langle f_2, f_2 \rangle = 1$ ,  $\langle f_3, f_3 \rangle = 2$

et  $M_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1 ( 10pts)**

Soit l'application  $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par;

$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X], \phi(P, Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$ .

On rappelle que  $(1, X, X^2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1. (a) Montrer que  $\phi$  est une forme bilinéaire symétrique.
- (b) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1 a)  $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$   
 $\phi(\alpha L_1 + L_2, Q) = \alpha \phi(L_1, Q) + \phi(L_2, Q)$

b) 
$$A = \begin{pmatrix} \phi(1, 1) & \phi(1, X) & \phi(1, X^2) \\ \phi(X, 1) & \phi(X, X) & \phi(X, X^2) \\ \phi(X^2, 1) & \phi(X^2, X) & \phi(X^2, X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On considère la famille  $B = (1 - X^2, X, X^2)$ .
- Montrer que  $B$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - Déterminer la matrice de  $\phi$  dans cette base.
  - En déduire l'expression, dans cette base, de  $\phi$  et de la forme quadratique  $q$  associée.
  - $\phi$  est-il un produit scalaire  $\mathbb{R}_2[X]$ ?
3. Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(0) = 0\}$ .
- Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[X]$  et déterminer une base de  $F$ .
  - Déterminer l'orthogonal de  $F$  relativement à  $\phi$  défini par  
 $F^\perp = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; \forall Q \in F, \phi(P, Q) = 0\}$ .

$$(1 - X^2)$$

3/a. comme  $\text{card}(B) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ . donc il suffit de m. que

$$\det(B) \neq 0 \quad \text{On a } \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc  $B$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$

$$b. \quad M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c. \quad P = \alpha(1 - X^2) + \beta X + \gamma X^2; \quad Q = \alpha'(1 - X^2) + \beta' X + \gamma' X^2$$

$$\phi(P, Q) = -2\beta\beta' + 2\gamma\gamma'$$

$$q(P) = -2\beta^2 + 2\gamma^2$$

$$d. \quad \text{d'après b) ou bien c) On a } \text{sgn}(q) = (1, 1) \neq (3, 0)$$

donc  $\phi$  n'est pas un produit scalaire

$$3) a. F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$$

$$= \{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0 = 0\}$$

$$= \text{Vect}(X, X^2) \quad \text{donc } (X, X^2) \text{ est une base de } F.$$

b. comme  $F = \text{Vect}(X, X^2)$  alors

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(P, X) = 0 \\ \text{et} \\ \phi(P, X^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a_3 = 0 & c - a = d & a_3 = 0 \\ 2a_0 + 2a_2 = 0 & c - a = d & a_0 = -a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P} = a_0 - a_0 X^2 = a_0(1 - X^2)$$

d'où  $F^\perp = \text{Vect}(1 - X^2)$

### Exercice II (6pts)

Soit la forme quadratique  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  suivante

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2, \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- Déterminer  $f$  la forme bilinéaire associée à la forme quadratique  $q$ .
- Démontrer que  $f$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ .
- On munit  $\mathbb{R}^3$  de ce produit scalaire  $f$ .

Soient  $u_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (2, -2, 3)$  et  $u_3 = (1, 3, 4)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

- Démontrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  $\det(u_1, u_2, u_3) \neq 0$
- Appliquer la méthode Gram-Schmidt aux vecteurs  $(u_1, u_2, u_3)$  afin d'obtenir une base de  $\mathbb{R}^3$  orthonormée pour le produit scalaire  $f$ .

$$\Rightarrow f((x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3)) = 2x_1x'_1 + 2x_1x'_2 + 2x_1x'_3 + 2x_2x'_2 + 2x_2x'_3 + 2x_3x'_3$$

$$+ (x_1x'_2 + x_2x'_1) + (x_1x'_3 + x_3x'_1) + (x_2x'_3 + x_3x'_2)$$

1<sup>re</sup> méthode:

On a  $M_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$ ; pour m. que  $f$  est un produit

scalaire il suffit de m. que  $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}^+$  en effet:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ x-1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \quad C_1 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \quad L_2 + L_1$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ x-1 & 2-x \end{vmatrix} \quad C_1 - C_2$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix} \quad L_2 + L_1$$

d'où  $P_A(x) = (1-x)^2(4-x)$

1 0 4-x 1 -1 1 -1

$$\text{d'où } P_A(x) = (x-1)^2 (x-4)$$

$$\text{c-a-d } \text{Spt}(A) = \{1, 4\} \subset \mathbb{R}^{\neq \emptyset}$$

2<sup>de</sup> méthode pour p.s  $\Leftrightarrow \text{Sgn}(q) = (3, 0)$

$$\text{On a } \frac{1}{2}q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$= x_3^2 + 2x_3 \left( \frac{x_1+x_2}{2} \right) + \left( \frac{x_1+x_2}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_1+x_2}{2} \right)^2$$

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{1}{2}x_1 x_2$$

$$+ x_3^2 + x_3^2 + x_1 x_2$$

$$= \left( x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{3}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1 x_2$$

$$= \left( x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( x_2^2 + 2x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3 + \left( \frac{x_3}{3} \right)^2 \right)$$

$$- \frac{3}{4}x_3^2 - \frac{x_2^2}{12}$$

$$= \left( x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( x_2 + \frac{x_3}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2$$

$$\begin{cases} e_1 = e_1^* + \frac{e_2^*}{2} + \frac{e_3^*}{2} \\ e_2 = e_2^* + \frac{e_3^*}{3} \\ e_3 = e_3^* \end{cases}$$

d'où  $\text{Sgn}(q) = (3, 0)$  et donc pour un p.s.

$\Leftarrow$  On pose  $u_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}$

$$x_1 = u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{2}{3}u_3$$

$$u_2 = x_2 + \frac{x_3}{3} \Rightarrow$$

$$x_2 = u_2 - \frac{u_3}{3}$$

$$u_3 = x_3$$

$$x_3 = u_3$$

$$\text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $\left( (1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \right)$  est une base orthogonale.  $\gg$

### Exercice III (4pts)

On considère  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire euclidien usuel  $(\cdot, \cdot)$  (Rappelons que  $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$  où  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ).  
Soit  $F \subset \mathbb{R}^4$  le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

- Déterminer deux vecteurs  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^4$  tels que  $F = \{u, v\}^\perp$ .
- Déduire la dimension de  $F$  et de  $F^\perp$ .
- Déterminer une base orthonormée de  $F^\perp$ .
- Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ . Déterminer  $a \in F$  et  $b \in F^\perp$  tels que  $x = a + b$ .

$$1/ F = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ \text{et} \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad F &= \left\{ \overbrace{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^{\wedge} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \text{et} \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ X \in \mathbb{R}^4 / \left\langle X, \underbrace{(1, 2, 1, -1)}_u \right\rangle = \left\langle X, \underbrace{(1, -1, -1, -1)}_v \right\rangle = 0 \right\} \\
 &= \{u, v\}^\perp
 \end{aligned}$$

2) donc  $F^\perp = (\{u, v\}^\perp)^\perp = \text{Vect}(u, v)$  : comme  $(u, v)$  est libre donc  $\dim(F^\perp) = 2$

et donc comme  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

d'où  $\dim(F) = 2$ .

3) On  $(u, v)$  une base de  $F^\perp$

comme  $\langle u, v \rangle = 0$  donc  $(u, v)$  est une base orthogonale de  $F^\perp$

et par suite  $\left( \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right)$  est une base orthonormée de  $F^\perp$

4)  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\exists! a \in F$ ,  $\exists! b \in F^\perp$  :  $x = a + b$

On a  $b = \mathcal{P}_{F^\perp}(x)$  et  $a = \mathcal{P}_F(x)$

or  $\left( \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right)$  est une base orthonormée de  $F^\perp$  alors

$$\begin{aligned}
 b &= \mathcal{P}_{F^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|} + \left\langle x, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

et  $a = x - b = \dots$