Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire.

1. Soient λ et μ deux réels. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors $Ker(f - \lambda Id)$ et $Ker(f - \mu Id)$ sont en somme directe (où Id désignant l'application identité de E).

2. On suppose désormais que $E = \mathbb{R}^3$ et que f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x & +2y & -2z \\ x & +2y & -z \\ 2x & +2y & -z \end{pmatrix} =$$

Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques (au départ et à l'arrivée)

3. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.
Montrer que $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

4. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $Ker(f - \lambda Id) \neq \{0\}$.

1) $Ker(f - \lambda Id)$ et $Ker(f - \mu Id)$ sont en somme directe.

c-à-d $Ker(f-\lambda Id) \cap Ker(f - \mu Id) = \{0\}$

Soit $x \in Ker(f - \lambda Id) \cap Ker(f - \mu Id)$, donc

$x \in Ker(f - \lambda Id)$ et $x \in Ker(f - \mu Id)$.

c-à-d $(f - \lambda Id)(x) = f(x) - \lambda Id(x) = f(x) - \lambda x = 0$ (1)

et $(f - \mu Id)(x) = f(x) - \mu x = 0$ (2)

donc $\begin{cases} (1) \Rightarrow f(x) = \lambda x \\ (2) \Rightarrow f(x) = \mu(x). \end{cases}$

c-à-d $\lambda x = \mu x$ et donc $(\lambda - \mu) x = 0$

comme $\lambda - \mu \neq 0$ (car $\lambda \neq \mu$) alors $x = 0$

D'où $Ker(f - \lambda Id) \cap Ker(f - \mu Id) = \{0\}$.

2) On a : $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

) On a : $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_3 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 - L_3$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 + L_2$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 - C_1$$

$$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda).$$

4) $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\} \iff f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injective

(car $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est endomorphisme et $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$) $\iff f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas bijective

(car $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est endomorphisme
et $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$)

$\iff f - \lambda id$ n'est pas bijective

$\iff \det(A - \lambda I_3) \neq 0$

$\iff P(\lambda) = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

5 Determiner une base et la dimension de $F = Ker(f - Id)$ et $G = Ker(f - 2Id)$.

6. En deduire a l aide de la question 1) que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

7. Soient $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Montrer que (V_1, V_2) est une base de F , (V_3) une base de G et $B = (V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Deduire que la matrice A est diagonalisable.

8. Déterminer la matrice de passage Q de la base canonique à la base B.

9. Soit A' la matrice de f dans la base B (au départ et à l'arrivée). Sans calculer Q^{-1}, déterminer A'.

10. Exprimer A en fonction de A', Q, Q^{-1} puis A^n en fonction de A', Q et Q^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc.

$$X \in F \iff (f - id)(X) = 0$$

$$\iff (A - I_3)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff z = x + y.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{V_1} + y \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{V_2}$$

$$\iff X \in Vect(V_1, V_2)$$

Donc (V_1, V_2) est une famille generatrice de F et de plus (V_1, V_2) est libre. donc c'est une base de F.

De même

$$X \in G \iff (A - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & (1) \\ x - z = 0 & (2) \\ 2x + 2y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

<< (1) + (2) = (3) >>

$$\iff x = z = 2y.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D'où $G = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et par suite $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de G.

6) pour m. que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ il suffit de montrer que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F) + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d'après (1) pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ on a : $F \cap G = \{0\}$

et d'après (5) on a : $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$

donc $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

D'où $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

7) comme $(A-I_3)V_1 = (A-I_3)V_2 = 0$ (simple à vérifier)

alors $\text{vect}\{V_1, V_2\} \subseteq F$. Or (V_1, V_2) est libre (simple à vérifier)

donc $\begin{cases} \text{Vect}(V_1, V_2) \subseteq F \\ \quad \text{et} \\ \dim(\text{Vect}(V_1,V_2)) = 2 = \dim(F) \end{cases}$

et donc $F = \text{Vect}(V_1,V_2)$ et par suite (V_1, V_2) est une base de F.

- d'après (5) on a (V_3) est une base de G.

On $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, (V_1, V_2) une base de F et (V_3) une base de G. D'où (V_1, V_2, V_3) une base $\mathbb{R}^3$.

Donc (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec tous les V_i sont des vecteurs propre et par suite A est diagonalisable.

5 Determiner une base et la dimension de $F = Ker(f - Id)$ et $G = Ker(f - 2Id)$.

6. En deduire a l'aide de la question 1) que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

7. Soient $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Montrer que (V_1, V_2) est une base de F, (V_3) une base de G et $B = (V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Deduire que la matrice A est diagonalisable.

8. Déterminer la matrice de passage Q de la base canonique à la base B.

9. Soit A' la matrice de f dans la base B (au départ et à l'arrivée). Sans calculer Q^{-1}, déterminer A'.

10. Exprimer A en fonction de A', Q, Q^{-1} puis A^n en fonction de A', Q et Q^{-1}.

8) $Q = (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $V_1, V_2 \in F = \text{Ker}(f - id)$, donc

On a: $V_1, V_2 \in F = \ker(f - Id)$, donc

$$(f-id)(V_1) = 0 \text{ et } (f-id)(V_2) = 0$$

c-à-d $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_2$

de même comme $V_3 \in G = \ker(f - 2Id)$ alors $f(V_3) = 2V_3$.

D'où $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10:

On sait que $A = Q A' Q^{-1}$

D'où $A^n = Q A'^n Q^{-1}$

Exercice I (8pts)

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (-2x+y, x-2y) \end{array}$$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que g est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de g dans la base canonique? g est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de g.
4. En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $(g - \alpha I) \circ (g - \beta I) = 0$ (on choisira $\alpha < \beta$).
5. Déterminer les sous-espaces $G_\alpha = \text{Ker}(g - \alpha I)$ et $G_\beta = \text{Ker}(g - \beta I)$.
6. Déterminer l'endomorphisme g^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Préciser g^{-1}

1) $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a:

$$g((x,y) + \alpha(x',y')) = \cdots = g(x,y) + \alpha g(x',y')$$

donc g est un endomorphisme.

2) On a: $g((1,0)) = (-2, 1)$ et $g((0,1)) = (1, -2)$

d'où $M_{B_c}(g) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

comme $\det(M_{B_c}(g)) = 4 - 1 = 3 \neq 0$

donc g est un automorphisme.

3) $$\underline{P}(X) = \det(M(g) - X I_2)$$
$$= \begin{vmatrix} -2-X & 1 \\ 1 & -2-X \end{vmatrix}$$
$$= (2+X)^2 - 1$$
$$= (X+3)(X+1)$$

4) On sait que $\underline{P}(g) = 0.$

c-à-d $(g + 3Id) \circ (g + Id) = 0$

donc $(g - \alpha Id) \circ (g - \beta Id) = 0$

avec $\alpha = -3$ & $\beta = -1$

5) $X = (x, y)$ donc.

$X \in G_\alpha \iff (g - \alpha Id)(X) = 0 \iff (M(g) + 3I_2)X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = -y.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $G_\alpha = \text{Vect}(\underbrace{(1,-1)}_{v_1}).$

- G_β. de même

- G_β. de même

$$X \in G_\beta \iff (M(g)+I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = y.$$

$$\iff X = x(1,1).$$

D'où $G_\beta = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1)}_{V_2})$.

6) Soit $B = (V_1, V_2)$.

Donc $M_B(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

et $M_{B_c \longrightarrow B} = \underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $M_{B \longrightarrow B_c} = \underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

« $V_1 = (1,-1)$ et $V_2 = (1,1)$ donc $e_1 = (1,0) = \frac{V_1}{2} + \frac{V_2}{2}$

$e_2 = (0,1) = \frac{V_2}{2} - \frac{V_1}{2}$ »

donc $M_{B_c}(g) = \underline{P}\, M_B(g)\, \underline{P}^{-1}$.

et donc $M^n_{B_c}(g) = \underline{P}\, M^n_B(g)\, \underline{P}^{-1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$= \ldots$

$= \dots$

En particulier

$$M^{-1}_{B_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $g^{-1}((x,y)) = \left(-\frac{2x}{3} + \frac{y}{3}, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \right)$

Exercice II (12pts)

Partie I

Soit h, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$h(x,y,z) = (3x - 2y - 2z,\ 6x - 5y - 2z,\ 6x - 2y - 5z)$$

1. Donner la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? A
2. Déterminer le polynôme caractéristique de h.
3. Déterminer les sous-espaces $D = \operatorname{Ker}(h + I)$ et $P = \operatorname{Ker}(h + 3I)$: précisément, donner des bases génératrices.
4. Justifier que P et D sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on déduire?
5. Donner une expression de $h^n(x,y,z)$ pour tout entier $n \geq 0$.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -2 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

2) $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 & -2 \\ 6 & -5-X & -2 \\ 6 & -2 & -5-X \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3-X & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3-X & -2 & -2 \\ 6 & -5-X & -2 \\ 0 & 3+X & -3-X \end{vmatrix} \quad L_3 - L_2$$

$$\overset{C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & -4 & -2 \\ 6 & -7-X & -2 \\ 0 & 0 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= -(3+X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 \\ 6 & -7-X \end{vmatrix}$$

$$= -(3+X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 \\ 3+X & -3-X \end{vmatrix} \quad L_2 - L_1$$

$$\overset{C_1 + C_2}{=} -(3+X) \begin{vmatrix} -1-X & -4 \\ 0 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= -(3+X)^2 (1+X)$$

3) Soit $X = (x, y, z)$.

$$X \in D \iff (A + I_3) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 6x - 4y - 2z = 0 & (2) \\ 6x - 2y - 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y & (1). \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y & (1). \\ y = z & (3)-(2) \end{cases}$$

D'où $D = \text{Vect}(\underbrace{(1,1,1)}_{V_1})$.

de même, $X \in P \iff (A + 3I_3)X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 6x - 2y - 2z = 0$$

$$\iff z = 3x - y.$$

$$\iff X = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{V_2} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

D'où $P = \text{Vect}(V_2, V_3)$

4) On a : $P \cap D = \{0\}$ et $\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3$
$= \dim(\mathbb{R}^3)$

donc $\mathbb{R} = D \oplus P$ et par suite h est diagonalisable.

5) Soit $B = (V_1, V_2, V_3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

et $B = M_{B}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \ldots$

D'où $A = P B P^{-1}$

D'où $A = P B P^{-1}$

et par suite $A^n = P B^n P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \ldots$$

d'où $h^n(x,y,z) = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ldots$

Partie II

$$\begin{cases} u_0 = +1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 6u_n - 2v_n - 5w_n \end{cases}$$

1. Quelle relation existe-t'il entre $X_n = (u_n, v_n, w_n)$, $X_{n+1} = (u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$ et h?
2. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

$${}^tX_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - 2v_n - 2w_n \\ 6u_n - 5v_n - 2w_n \\ 6u_n - 2v_n - 5w_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -2 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

c-à-d ${}^tX_{n+1} = A\,{}^tX_n$

2) D'où ${}^tX_{n+1} = A\,{}^tX_{n+1}$

$\Rightarrow {}^tX_n = A^n\,{}^tX_0$

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots$$