Espace Euclidiens;

- Produit scalaire:

Déf: Soit E un e.v sur un corps $\mathbb{K}$. L'application.

$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$. est appelée une forme:

1) bilinaire: si elle linéaire % à chaque coordonnée

2) Symétrique: $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall x,y \in E$.

3) positive. si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(x,x) \geq 0$.

4) définie positive: $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x,y) > 0$.

c-à-d positive ⊕ $f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

déf; E un e.v. sur $\mathbb{R}$. On appelle un produit scalaire.

sur E, tout application noté $\langle , \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$.

qui Symétrique, bilinaire, définie positive.

- $(E, \langle , \rangle)$ est un espace prehilbertien réel.

- si $\dim E < \infty$, $(E, \langle , \rangle)$ c'est un espace Euclidien.

Exp: $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique $\langle , \rangle$.

définie par $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ex2 : E un e.v. de dimension n, et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E,

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ avec}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Ex3 : $E = M_n(\mathbb{R})$. $\langle A, B\rangle = tr({}^tAB)$.

il est facile de vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique

- Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$ alors.

$$\langle A, A\rangle = tr({}^tA\,A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 > 0.$$

Ex4 : $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx.$$

Rq : $f : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinaire et E de dimension finie, $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

alors $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y\right)$.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j f(e_i, e_j).$$

$$= {}^tX\,M\,Y.$$

$$= {}^tX\, M\, Y.$$

avec $M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$

Rq : 1) $q(x) = f(x,x)$ est la forme quadratique associé à f.

2). f est symétrique ssi $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$ $\forall i \neq j$

ssi $M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique.

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ $\quad \sum a_{ij}\, x_i\, y_j$

Exp : $f(X, Y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_1$

est symetrique car les coefficients de $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont les mêmes. Elle est aussi bilinaires car dans tous les monômes $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ les degrés de x_i et y_j sont égals à 1

Ex : $f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1$

alors f est bilinéaire mais elle n'est symétrique.

Def : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un e.v.

1) Soit $x \in E$, Puisque $\langle x, x \rangle \geq 0$ alors posons :
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. $\|\cdot\|$ s'appelle la norme associe au $\langle , \rangle$.

2) $d(x,y) = \|x - y\|$.

2) $d(x,y) = \|x-y\|$.

« Règle de calcul » $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.

Identités remarquables:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle.$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle.$$
$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle.$$

ii) Identité de polarisation:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

iii) Identité du parallélogramme:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Inégalité de Cauchy-Shwarz (I.C.S)

$\forall x,y \in E \quad \langle x,y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$. avec égalité ssi $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$.

Ex M. que pour tous $A,B \in S_n(\mathbb{R})$ (matrices symetrique):

$$tr(AB)^2 \leqslant tr(A^2) \cdot tr(B^2)$$

Solution:

On a $\langle A,B\rangle = tr({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

donc d'après inégalité de Cauchy-Shwarz: $\langle A,B\rangle^2 \leqslant \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$

or $\langle A,B\rangle = tr({}^tAB) = tr({}^tAB)$ « car ${}^tA = A$ »
et $\|A\|^2 = \langle A,A\rangle = tr({}^tAA) = tr(A^2)$ et de même $\|B\|^2 = tr(B^2)$.

D'où $tr(AB) \leqslant tr(A^2) \cdot tr(B^2)$.

Ex2: On considère $E = C([a,b], \mathbb{R})$ L'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ muni de produit scalaire:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

donc I.C.S donne,

$$\langle f,g \rangle^2 \leq \|f\|^2 . \|g\|^2 \quad \text{c-a-d}$$

$$\text{«} \left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt \cdot \int_a^b g^2(t)\, dt \text{»}$$

En particulier si $f > 0$: alors

$$\left(\int_a^b \cancel{\sqrt{f(t)}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{f(t)}}}\, dt\right)^2 \leq \int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt$$

c-à-d
$$(b-a)^2 \leq \int_a^b \underline{f(t)}\, dt \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

« Q3, Ex1 CC1 ENSAM 2023-2024 »

Ex3: Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. M.que.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$ Dans quel cas a-t-on l'égalité

Solution: Soit $X = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ et $Y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$.

L'inegalité de Cauchy schwarz donne:

$$\langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 . \|Y\|^2.$$

c-à-d
$$\left[\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x_i}}} \cdot \cancel{\sqrt{x_i}}}^{1}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_i}\right)^2}^{=1}$$

i.e. $n^2 \leq \sum 1$

i,e, $$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

De plus, On a égalité, si et seulement il existe α tel que $X = \alpha Y$

c-à-d $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) = \alpha\left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}\right)$

i,e, $\frac{1}{\sqrt{x_i}} = \alpha\sqrt{x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$, donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\alpha}$.

donc $x_1 + x_1 + \dots + x_n = n\, x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 1/n$

d'où On a égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n$.

Ex4: Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $\overbrace{2x^2 + y^2 + 5z^2}^{= \|v\|^2} \leq 1$

Demontrer que $\underbrace{(x+y+z)}_{\langle u, v\rangle}{}^2 \leq \frac{17}{10}$.

Solution:

Soit $v = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$, donc $\|v\|^2 = 2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$

et soit $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, donc $\langle u, v\rangle^2 = (x+y+z)^2$.

D'où $(x+y+z)^2 = \langle u, v\rangle^2 \overset{I.C.S}{\leq} \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq \|u\|^2$.

Or $\|u\|^2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{5} = \frac{17}{10}$

D'où $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Déf:

1) deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux si

$\langle x, y\rangle = 0$ et on note $x \perp y$

1) deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$ et sera noté $x \perp y$.

2). une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est dite orthogonale si

$$\forall i \neq j, \quad \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

3). une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormé si

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Exp:

1/ $\{e_i\}$ une base orthogonale de E. alors $\left\{\frac{e_i}{\|e_i\|}\right\}$ est une base orthonormée.

2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs non nul deux à deux orthogonaux, alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre.

3) $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormé ssi $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$\forall\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Th: Dans un espace Euclidien, il existe toujours une base orthonormée.

Procédé d'orthonormalisation Gram Shmidt.

- Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E.

$$u_1 = v_1 \longrightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 \longrightarrow e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$U_3 = V_3 - \langle V_3, e_1 \rangle e_1 - \langle V_3, e_1 \rangle e_2 \longrightarrow e_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|}$

donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormé de $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$

Ex: dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canoniques, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Shmidt la base suivante.

$U = (1,0,1)$, $V = (1,1,1)$ et $W = (-1,-1,0)$.

Solution: On a: $\text{card}(U, V, W) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. donc pour montrer que (U, V, W) est une base il suffit de m-que $\det(U, V, W) = 0$

On $\det(U,V,W) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc c'est une base. (U, V, W)

- On a: $\|U\| = \sqrt{2}$, donc $U_1 = \frac{U}{\|U\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

On pose $V_2 = V - \langle V, U_1 \rangle U_1 = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0)$

D'où $U_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = (0, 1, 0)$

On pose $V_3 = W - \langle W, U_1 \rangle U_1 - \langle W, U_2 \rangle U_2$

$= (-1,-1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + (0,1,0)$

$= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

donc $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

D'où (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

- Soit F un s.e.v de E, alors :

$$F^{\perp} = \{x \in E \,/\, \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in E\}$$

Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors :

$$F^{\perp} = \{x \in E \,/\, \langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

Si $\dim E < \infty$:

HR : $E = F \oplus F^{\perp}$

c-à-d $\forall x \in E, \exists! x_F \in F, \exists x_{F^\perp} \in F^{\perp}$ tel que

$$x = x_F + x_{F^\perp}.$$

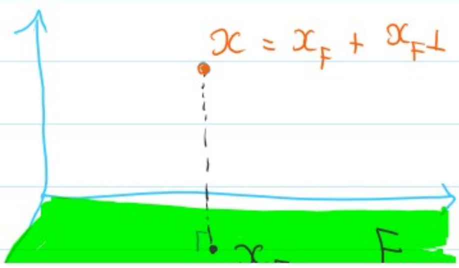
La projection orthogonale $P_F : E \longrightarrow F$

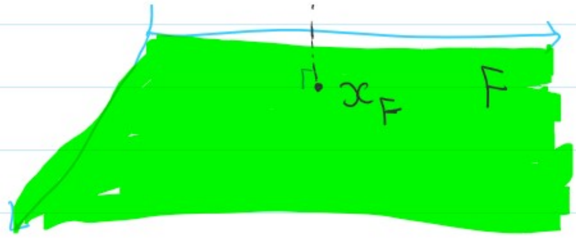
$$x \longmapsto P_F(x) = x_F$$

et $P_{F^\perp} : E \longrightarrow F^{\perp}$

$$x \longmapsto P_{F^\perp}(x) = x_{F^\perp}.$$

c-à-d « $P_{F^\perp} + P_F = Id_E$ »





Rq:

$$d(x,F) \doteq \inf_{y\in F} \|x-y\| = \|x - P_F(x)\| = \|P_{F^\perp}(x)\|.$$

Rq: Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormé de F, alors

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$$

ENSAM - 2023-2024.

Exercice 2. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit F l'espace vectoriel engendré par :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.
2. Donner la dimension de $F^\perp$, puis en déterminer une base.
3. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, construire une base orthonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de F.
4. Donner l'expression de $P_F(x)$, la projection orthogonale d'un élément quelconque $x \in \mathbb{R}^4$ sur F.
5. Calculer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 4, 5)$ sur F.

1) On a $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ c-à-d $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille génératrice, donc il suffit de m. que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

c-a-d
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + 2\beta = 0 & (2) \\ \alpha + 2\beta = 0 & (3) \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 & (4) \end{cases}$$

$3(1) - (4) \Rightarrow \alpha = 0$ et donc $(2) \Rightarrow \beta = 0$

et donc $\gamma = 0$ d'après (1). Conclusion $\alpha = \beta = \gamma = 0$

D'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.

D'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.

2) $F^{\perp} = \{ X = (x, y, z, t) \;/\; \langle X, e_i \rangle = 0 \;\; \forall\, i = 1, 2, 3 \}$.

Donc.

$$X \in F^{\perp} \iff \begin{cases} \langle X, e_1 \rangle = x + y + z + t = 0 & (1) \\ \langle X, e_2 \rangle = x + 2y + 2z + 3t = 0 & (2) \\ \langle X, e_3 \rangle = x + 3t = 0 & (3) \end{cases} \qquad -x + t = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{x} + y + z + \cancel{t} = 0 \\ x = t & (2) - 2(1) \\ 4x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t = 0 \\ y = -z. \end{cases}$$

$$\iff X = (0, y, -y, 0) = y(0, 1, -1, 0).$$

D'où $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\{(0, 1, -1, 0)\}$

3) /

Exercice 2. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit F l'espace vectoriel engendré par :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.
2. Donner la dimension de $F^{\perp}$, puis en déterminer une base.
3. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, construire une base orthonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de F.
4. Donner l'expression de $P_F(x)$, la projection orthogonale d'un élément quelconque $x \in \mathbb{R}^4$ sur F.
5. Calculer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 4, 5)$ sur F.

On a : $\|e_1\| = 2$ donc $\quad u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$

On pose $v_2 = e_2 - \overbrace{\langle e_2, u_1 \rangle}^{4} u_1 = (1, 2, 2, 3) - 2(1, 1, 1, 1) -$

$= (-1, 0, 0, 1)$

D'où $$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1).$$

On pose $v_3 = e_3 - \langle e_3, u_1\rangle u_1 - \langle e_3, u_2\rangle u_2$

$$= (1,0,0,3) - (1,1,1,1) - (-1,0,0,1)$$

$$= (1,-1,-1,1)$$

d'où $$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormé de F.

4) $1^{ère}$ méthode : On a : $\{(0,1,-1,0)\}$ est une base de $F^\perp$ Q2.

d'où $\{u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)\}$ est une base orthonormé de $F^\perp$

donc $\forall X = (x,y,z,t)$ On a :

$$P_{F^\perp}(X) = \langle X, u_4\rangle u_4.$$

$$= \frac{y-z}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$$

$$= \frac{1}{2}(0, y-z, z-y, 0)$$

On $P_F(X) + P_{F^\perp}(X) = X.$

c-à-d $$P_F(X) = (x,y,z,t) - P_{F^\perp}(x,y,z,t)$$

$$= \left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}, t\right)$$

$2^{ère}$ méthode :

On a (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormé de F donc

$$P_F(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 + \langle x, u_3 \rangle u_3 = \cdots$$

4) $u = (1, 2, 4, 5)$

donc $P_F(u) = (1, 3, 3, 5)$.