

CORRECTION TD N°1 : Les quadripôles

Eléments Électronique-AP2

2021-2022

Exercice 1:

Objet: savoir calculer les paramètres quadripôles.

1. Détermination des paramètres du quadripôle parallèle Q_P :

On peut en déduire directement par la loi des mailles:

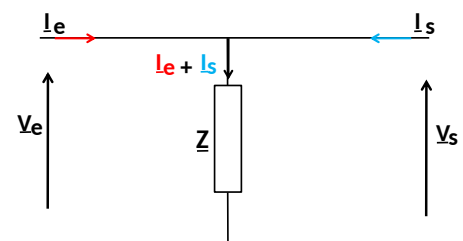
$$\underline{V}_e = \underline{V}_s = \underline{Z}(\underline{i}_e + \underline{i}_s)$$

Soit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_e \\ \underline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_e \\ \underline{i}_s \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\underline{Z}]_{Q_P} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$$



2. Détermination des paramètres du quadripôle parallèle Q_T :

On a:

$$\underline{V}_e = \underline{U}_{Z1} + \underline{U}_{Z2} = \underline{Z}_1 \underline{i}_e + \underline{Z}_2 (\underline{i}_e + \underline{i}_s) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{i}_e + \underline{Z}_2 \underline{i}_s$$

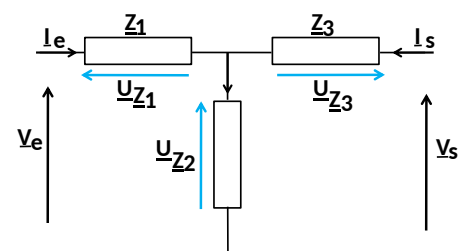
$$\underline{V}_s = \underline{U}_{Z2} + \underline{U}_{Z3} = \underline{Z}_2 (\underline{i}_e + \underline{i}_s) + \underline{Z}_3 \underline{i}_s = \underline{Z}_2 \underline{i}_e + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{i}_s$$

Soit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_e \\ \underline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_e \\ \underline{i}_s \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\underline{Z}]_{Q_T} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix}$$



-Dédution du résultat de la question 1

$$[Z]_{QP} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow 0 \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \underline{Z} \\ \underline{Z}_3 \rightarrow 0}} [Z]_{QT} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$$

3. Dédution des paramètres du quadripôle série Q_S :

$$[Z]_{QS} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow \underline{Z} \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \infty \\ \underline{Z}_3 \rightarrow 0}} [Z]_{QT} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow 0 \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \infty \\ \underline{Z}_3 \rightarrow \underline{Z}}} [Z]_{QT} = \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Donc il n'existe pas de matrice impédance du quadripôle série $[Z]_{QS}$

4. Détermination des paramètres admittances du quadripôle série Q_S :

La loi des mailles:

$$\text{côté entrée : } \underline{V}_e = \underline{Z} \underline{i}_e + \underline{V}_s$$

$$\text{côté sortie : } \underline{V}_s = \underline{Z} \underline{i}_s + \underline{V}_e$$

donc:

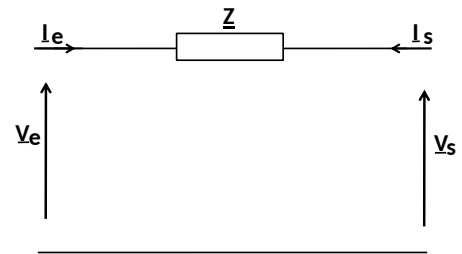
$$\underline{i}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}} - \frac{\underline{V}_s}{\underline{Z}}$$

et

$$\underline{i}_s = \frac{\underline{V}_s}{\underline{Z}} - \frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}}$$

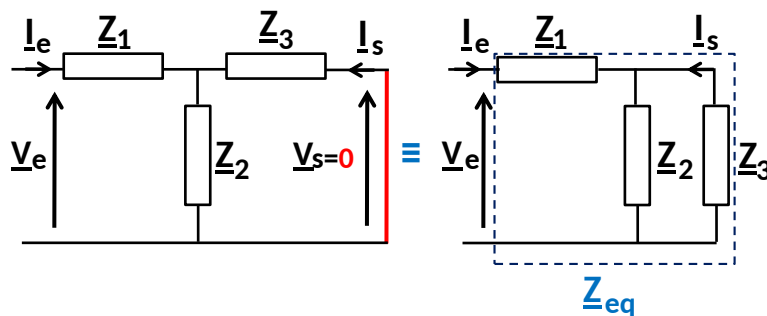
d'où :

$$[Y]_{QS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$



5. Détermination des paramètres admittances du quadripôle Q_T (méthode définition):

-On a: $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{i}_e}{\underline{V}_e} \Big|_{\underline{V}_s=0}$: admittance d'entrée du quadripôle QT en court-circuitant la sortie.



On peut écrire:

$$\underline{V}_e = \underline{Z}_{eq} \underline{i}_e = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 // \underline{Z}_3) \underline{i}_e$$

D'où:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{i}_e}{\underline{V}_e} \Big|_{\underline{V}_s=0} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 // \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j}$$

Avec: $\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3 + Z_2 \cdot Z_3$

- On a: $\underline{Y}_{21} = \left(\frac{i_s}{\underline{V}_e} \right)_{\underline{V}_s=0}$: admittance de transfert en court-circuitant la sortie.

Soit $\underline{Y}_{21} = \left(\frac{i_s}{\underline{V}_e} \right)_{\underline{V}_s=0} = \left(\frac{i_s}{i_e} \cdot \frac{i_e}{\underline{V}_e} \right)_{\underline{V}_s=0} = \frac{i_s}{i_e} \cdot \underline{Y}_{11}$

Il suffit de trouver la relation entre i_e et i_s

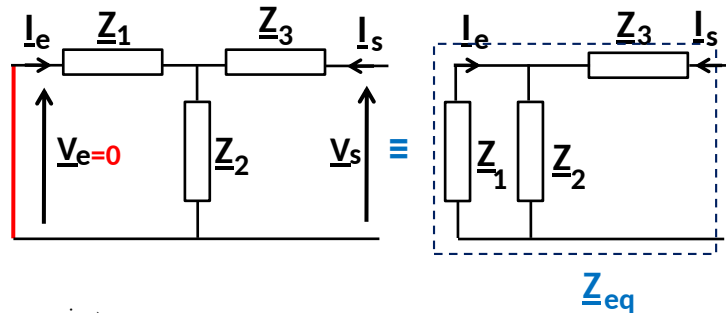
Par diviseur de courant, on peut écrire:

$$i_s = -i_e \cdot \frac{\frac{1}{Z_3}}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = -i_e \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

Ainsi:

$$\underline{Y}_{21} = -\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \cdot \frac{Z_2 + Z_3}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} = -\frac{Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j}$$

Calcul de $\underline{Y}_{22}$ et $\underline{Y}_{12}$:



-On a: $\underline{Y}_{22} = \left(\frac{i_s}{\underline{V}_s} \right)_{\underline{V}_e=0}$: admittance de sortie en court-circuitant l'entrée.

On peut écrire :

$$\underline{V}_s = Z_{eq} i_s = (Z_3 + Z_1 // Z_2) i_s$$

D'où:

$$\underline{Y}_{22} = \left(\frac{i_s}{\underline{V}_s} \right)_{\underline{V}_e=0} = \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_3 + Z_1 // Z_2} = \frac{1}{Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3 + Z_2 \cdot Z_3} = \frac{Z_1 + Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j}$$

-On a: $\underline{Y}_{12} = \left(\frac{i_e}{\underline{V}_s} \right)_{\underline{V}_e=0}$: admittance de transfert inverse en court-circuitant l'entrée.

Soit $\underline{Y}_{12} = \left(\frac{i_e}{\underline{V}_s} \right)_{\underline{V}_e=0} = \left(\frac{i_e}{i_s} \cdot \frac{i_s}{\underline{V}_s} \right)_{\underline{V}_e=0} = \frac{i_e}{i_s} \cdot \underline{Y}_{22}$

Il suffit d'exprimer i_e en fonction de i_s

Par diviseur de courant, on peut écrire:

$$i_e = -i_s \cdot \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = -i_s \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Ainsi:

$$\underline{Y}_{12} = -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} = -\frac{Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j}$$

Finalement :

$$[\underline{Y}]_{QT} = \begin{pmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} & -\frac{Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} \\ -\frac{Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} & \frac{Z_1 + Z_2}{\prod_{i \neq j} Z_i \cdot Z_j} \end{pmatrix}$$

-Dédution du résultat de la question 4

$$[Y]_{QS} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow \underline{Z} \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \infty \\ \underline{Z}_3 \rightarrow 0}} [Y]_{QT} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow 0 \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \infty \\ \underline{Z}_3 \rightarrow \underline{Z}}} [Y]_{QS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$

-Vérification que : $[Y]_{QT} = [Z]_{QT}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}[Z]_{QT}} \cdot \text{Com}^T [Z]_{QT}$

Pour le déterminant:

$$\text{Det}[Z]_{QT} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{Z}_2^2 = \prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j$$

Pour la comatrice:

$$\text{Com}^T [Z]_{QT} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix} \text{ Ainsi:}$$

$$[Y]_{QT} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j} & -\frac{\underline{Z}_2}{\prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{\prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\prod_{i \neq j} \underline{Z}_i \cdot \underline{Z}_j} \end{pmatrix} \quad \text{C.Q.F.D}$$

6. Dédution des paramètres admittance du quadripôle parallèle Q_P :

$$[Y]_{QP} = \lim_{\substack{\underline{Z}_1 \rightarrow 0 \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \underline{Z} \\ \underline{Z}_3 \rightarrow 0}} [Y]_{QT} = \lim_{\underline{Z}_3 \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_3} \\ \frac{1}{\underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Conclusion: il n'existe pas de matrice admittance pour quadripôle parallèle Q_P :, en effet il s'agit d'un "faut quadripôle".

Exercice 2:

Objet: savoir trouver la représentation électrique d'un quadripôle, à partir de ces équations d'état et inversement.

1. On a le schéma électrique du quadripôle suivant :

Côté entrée:

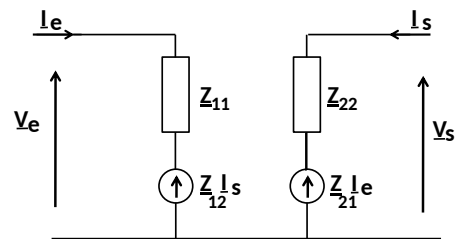
$$\underline{V}_e = \underline{Z}_{11} \underline{i}_e + \underline{Z}_{12} \underline{i}_s$$

Côté sortie:

$$\underline{V}_s = \underline{Z}_{21} \underline{i}_e + \underline{Z}_{22} \underline{i}_s$$

Par identification la représentation impédance $[Z]$ du quadripôle est:

$$[Z] = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$$



2. Représentation des schémas équivalents électriques des quadripôles Q_p , Q_T et Q_s :

-Pour le quadripôle parallèle la représentation impédance pour Q_p est :

$$[Z]_{Q_p} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$$

D'ou le schéma équivalent électrique de la figure 1

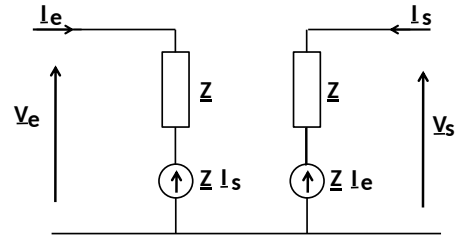


Figure 1: schéma équivalent électrique du quadripôle Q_p

-Pour le quadripôle Q_T la représentation impédance est :

$$[Z]_{Q_T} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix}$$

D'ou le schéma équivalent électrique de la figure 2

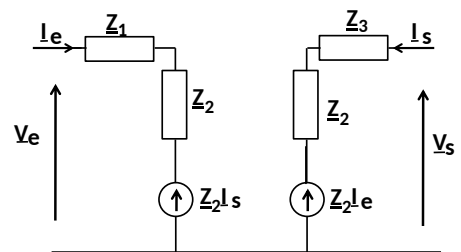


Figure 2: schéma équivalent électrique du quadripôle Q_T

-Pour le quadripôle Q_s la représentation impédance n'existe pas, on ne peut représenter son fonctionnement interne que sous de la représentation admittance:

$$[Y]_{Q_s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$

D'ou le schéma équivalent électrique de la figure 3

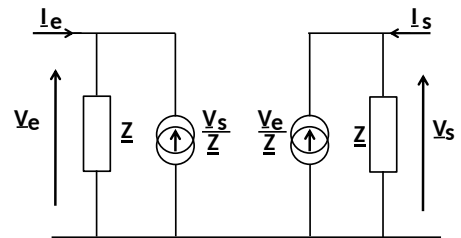
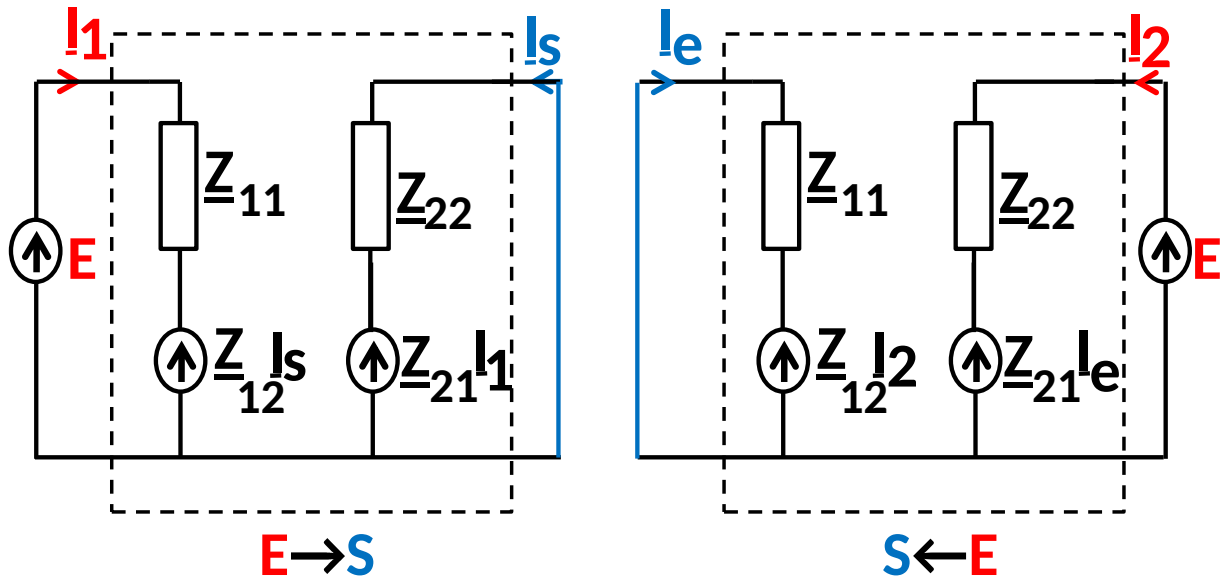


Figure 3: schéma équivalent électrique du quadripôle Q_s

Exercice 3:

Objet: Trouver comment certaines propriétés du quadripôle se répercute sur la matrice $[Z]$

1. En vertu de la propriété de la réciprocité, et si on modélise le quadripôle Q par la représentation impédance $[Z]$:



Si on considère l'excitation E à l'entrée et la sortie est en court-circuit (E->S)

Côté sortie :

$$Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_s = 0 \implies I_s = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \cdot I_1 \quad (1)$$

Côté entrée :

$$E = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_s \implies I_1 = \frac{E - Z_{12} \cdot I_s}{Z_{11}} \quad (2)$$

1 et 2 permet alors:

$$I_s = -\frac{Z_{21} E}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \quad (3)$$

Si on considère maintenant l'excitation E à la sortie et l'entrée est en court-circuit (S->E)

Côté entrée :

$$Z_{11} \cdot I_e + Z_{12} \cdot I_2 = 0 \implies I_e = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} \cdot I_2 \quad (4)$$

Côté sortie :

$$E = Z_{22} \cdot I_2 + Z_{21} \cdot I_e \implies I_2 = \frac{E - Z_{21} \cdot I_e}{Z_{22}} \quad (5)$$

4 et 5 permet alors:

$$I_e = -\frac{Z_{12} E}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \quad (6)$$

la propriété de la réciprocité stipule que $I_s = I_e$ soit 3=6 donc:

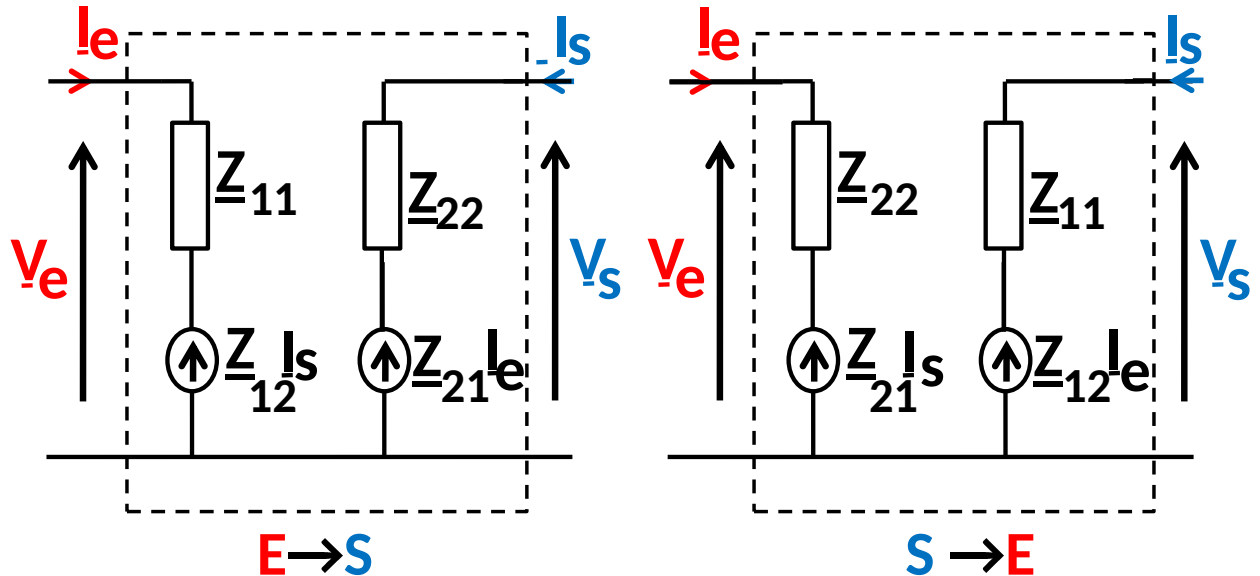
$$\boxed{Z_{21} = Z_{12}}$$

Conclusion: pour un quadripôle linéaire, il suffit de déterminer **trois** paramètres au lieu de quatre (Z_{11} , Z_{22} et $Z_{12}=Z_{21}$)

Vérification pour le quadripôle parallèle $[Z]_{Qp}$ on a: $Z_{12}=Z_{21}=\underline{Z}$

Vérification pour le quadripôle T $[Z]_{QT}$ on a: $Z_{12}=Z_{21}=\underline{Z}_2$

2. En vertu de la propriété de symétrie:



L'équation qui régie le quadripôle (E→S):

$$\underline{V}_e = \underline{Z}_{11}\underline{i}_e + \underline{Z}_{12}\underline{i}_s$$

$$\underline{V}_s = \underline{Z}_{21}\underline{i}_e + \underline{Z}_{22}\underline{i}_s$$

Soit la représentation impédance:

$$[Z]_{E-S} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

De même l'équation qui régie le quadripôle (S→E):

$$\underline{V}_e = \underline{Z}_{22}\underline{i}_e + \underline{Z}_{21}\underline{i}_s$$

$$\underline{V}_s = \underline{Z}_{12}\underline{i}_e + \underline{Z}_{11}\underline{i}_s$$

Soit la représentation impédance:

$$[Z]_{S-E} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix} \quad (8)$$

La symétrie est assurée si 7=8 donc $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ et $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.

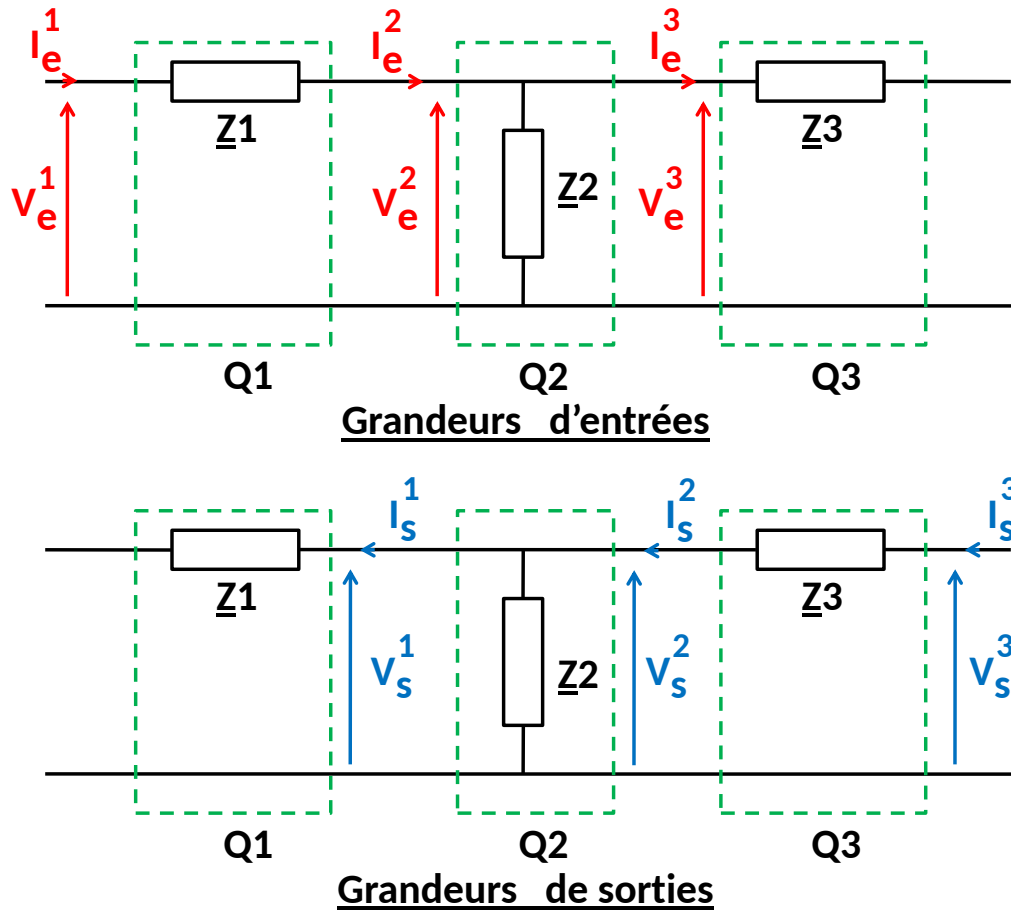
Conclusion: pour un quadripôle symétrique, il suffit de déterminer **deux** paramètres au lieu de quatre ($\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ et $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}$).

Vérification pour le quadripôle parallèle $[Z]_{Qp}$ on a: $\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_{22}=\underline{Z}$ et $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}=\underline{Z}$

Vérification pour le quadripôle T $[Z]_{QT}$ on a: $\underline{Z}_{11} \neq \underline{Z}_{22}$ $[Z]_{QT}$ n'est symétrique que pour $\underline{Z}_1=\underline{Z}_3$.

Exercice 4:

Objet: Étude de l'association cascade de quadripôles et savoir la relation de passage d'une représentation à une autre.



- On peut remarquer que: $(V_e^2 = V_s^1 \text{ et } i_e^2 = -i_s^1)$ et $(V_e^3 = V_s^2 \text{ et } i_e^3 = -i_s^2)$
C'est à dire que l'entrée du quadripôle Q2 est la sortie du quadripôle Q1. Et l'entrée du quadripôle Q3 est la sortie du quadripôle Q2. Il s'agit donc bien d'une association en **cascade** des quadripôles Q1, Q2 et Q3.
- la représentation quadripolaire convenable pour l'association cascade est soit la matrice de transfert (chaîne) [T] ou la matrice de transfert inverse (chaîne inverse) [t].

$$\begin{aligned} \underline{V}_e &= \underline{T}_{11} \underline{V}_s + \underline{T}_{12} (-i_s) \\ i_e &= \underline{T}_{21} \underline{V}_s + \underline{T}_{22} (-i_s) \end{aligned}$$

On a pour le quadripôle Q1:

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_e^1 \\ i_e^1 \end{pmatrix} = [T_{Q1}] \begin{pmatrix} \underline{V}_s^1 \\ -i_s^1 \end{pmatrix}$$

Et comme $\underline{V}_s^1 = \underline{V}_e^2$ et $i_s^1 = -i_e^2$ alors:

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_e^1 \\ i_e^1 \end{pmatrix} = [T_{Q1}] \begin{pmatrix} \underline{V}_s^1 \\ -i_s^1 \end{pmatrix} = [T_{Q1}] \begin{pmatrix} \underline{V}_e^2 \\ i_e^2 \end{pmatrix} = [T_{Q1}][T_{Q2}] \begin{pmatrix} \underline{V}_s^2 \\ -i_s^2 \end{pmatrix}$$

De même $\underline{V}_s^2 = \underline{V}_e^3$ et $i_s^2 = -i_e^3$ alors:

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_e^1 \\ i_e^1 \end{pmatrix} = [T_{Q1}][T_{Q2}] \begin{pmatrix} \underline{V}_s^2 \\ -i_s^2 \end{pmatrix} = [T_{Q1}][T_{Q2}] \begin{pmatrix} \underline{V}_e^3 \\ i_e^3 \end{pmatrix} = [T_{Q1}][T_{Q2}][T_{Q3}] \begin{pmatrix} \underline{V}_s^3 \\ -i_s^3 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$[T_{\text{equiv}}] = [T_{Q1}][T_{Q2}][T_{Q3}]$$

-Calcul de $[T_{Q1}]$ et $[T_{Q3}]$:

On a : $\underline{V}_e = \underline{Z}(-\underline{i}_s) + \underline{V}_s$

On a : $\underline{i}_e = -\underline{i}_s$

donc:

$$\begin{aligned}\underline{V}_e &= 1.\underline{V}_s + \underline{Z}(-\underline{i}_s) \\ \underline{i}_e &= 0.\underline{V}_s + 1.(-\underline{i}_s)\end{aligned}$$

d'où :

$$[T]_{QS} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$[T]_{Q1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$[T]_{Q3} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-Calcul de $[T_{Q2}]$:

On a : $\underline{V}_e = \underline{V}_s = \underline{V}_s + 0.(-\underline{i}_s)$

On a : $\underline{i}_e = \frac{\underline{V}_s}{\underline{Z}} - \underline{i}_s$

donc:

$$\begin{aligned}\underline{V}_e &= 1.\underline{V}_s + 0.(-\underline{i}_s) \\ \underline{i}_e &= \frac{1}{\underline{Z}}.\underline{V}_s + 1.(-\underline{i}_s)\end{aligned}$$

d'où :

$$[T]_{QP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{pmatrix}$$

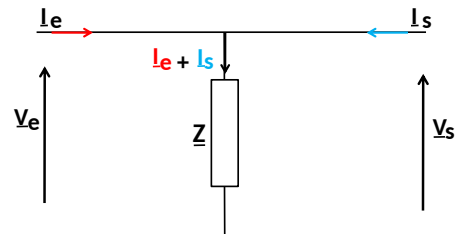
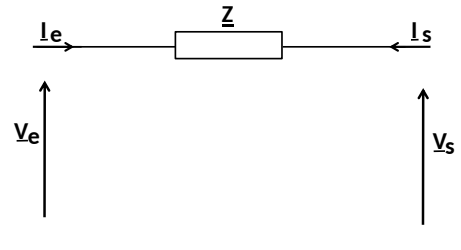
Donc :

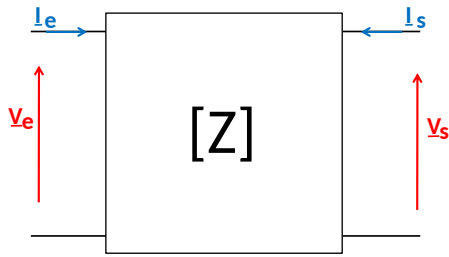
$$[T]_{Q2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

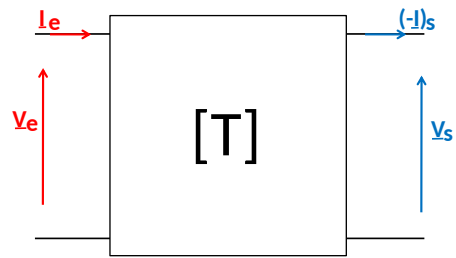
$$[T_{\text{equiv}}] = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1(1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}) \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{pmatrix}$$

3. Il faut trouver la relation de passage $[Z]=f[T]$. Pour cela:





$$S1 \begin{cases} V_e = Z_{11} \cdot i_e + Z_{12} \cdot i_s \\ V_s = Z_{21} \cdot i_e + Z_{22} \cdot i_s \end{cases}$$



$$S2 \begin{cases} V_e = T_{11} \cdot V_s + T_{12} \cdot (-i_s) \\ i_e = T_{21} \cdot V_s + T_{22} \cdot (-i_s) \end{cases}$$

On a par définition : $Z_{11} = \left(\frac{V_e}{i_e} \right)_{i_s=0}$: impédance d'entrée à sortie ouverte.

$$i_s = 0 \text{ dans } S2 \Rightarrow V_e = T_{11} \cdot V_s \text{ et } i_e = T_{21} \cdot V_s \Rightarrow \boxed{Z_{11} = \frac{T_{11}}{T_{21}}}$$

-De même : $Z_{21} = \left(\frac{V_s}{i_e} \right)_{i_s=0}$: impédance de transfert à sortie ouverte.

$$i_s = 0 \text{ dans } S2 \Rightarrow V_e = T_{11} \cdot V_s \text{ et } i_e = T_{21} \cdot V_s \Rightarrow \boxed{Z_{21} = \frac{1}{T_{21}}}$$

- $Z_{22} = \left(\frac{V_s}{i_s} \right)_{i_e=0}$: impédance de sortie à entrée ouverte.

$$i_e = 0 \text{ dans } S2 \Rightarrow T_{21} \cdot V_s - T_{22} \cdot i_s = 0 \text{ et } \Rightarrow \boxed{Z_{22} = \frac{T_{22}}{T_{21}}}$$

-De même : $Z_{12} = \left(\frac{V_e}{i_s} \right)_{i_e=0}$: impédance de transfert inverse à entrée ouverte.

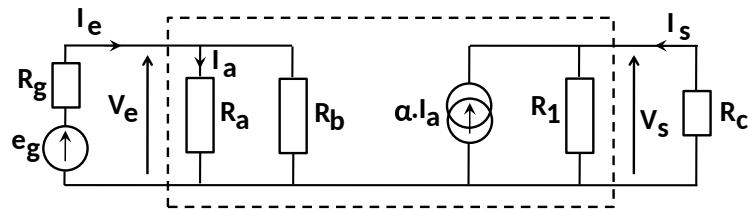
$$i_e = 0 \text{ dans } S2 \Rightarrow V_e = T_{11} \cdot V_s - T_{12} \cdot i_s \text{ et } 0 = T_{21} \cdot V_s - T_{22} \cdot i_s \Rightarrow \boxed{Z_{12} = \frac{T_{11} \cdot T_{22}}{T_{21}} - T_{12}}$$

On trouve ainsi:

$$[Z_{QT}] = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} . \text{C.Q.F.D}$$

Exercice 5:

Objet: Savoir déterminer les performances d'un quadripôle contenant des générateurs liés.



1. Impédance d'entrée du quadripôle: l'impédance d'entrée, Z_e , est l'impédance "vue" par la source qui alimente le quadripôle.

Soit: $Z_e = \frac{V_e}{i_e}$

On a côté entrée: $V_e = i_e \cdot (R_a // R_b) \Rightarrow Z_e = (R_a // R_b) = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$

2.

-Gain sans charge: $G_V = \frac{V_s}{V_e} |_{R_c = \infty}$

Côté sortie $R_c = \infty$ donc $V_s = \alpha i_a \cdot R_1$

Côté entrée: $V_e = R_a \cdot i_a$ donc:

$$G_V = \frac{V_s}{V_e} |_{R_c = \infty} = \alpha \frac{R_1}{R_a}$$

-Gain avec charge:

Côté sortie: $V_s = \alpha i_a \cdot (R_1 // R_c)$

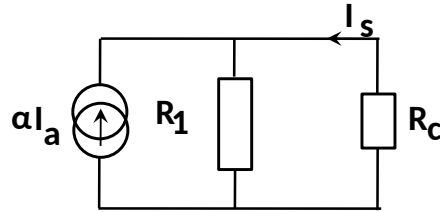
Côté entrée on a toujours: $V_e = R_a \cdot i_a$ donc:

$$G_V = \frac{V_s}{V_e} |_{R_c} = \alpha \frac{R_1 // R_c}{R_a} = \frac{\alpha R_1 R_c}{R_a (R_1 + R_c)}$$

3. Gain en courant:

$$G_I = \frac{I_s}{I_e} = \frac{I_s}{I_a} \cdot \frac{I_a}{I_e}$$

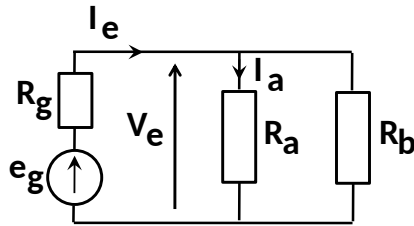
- $I_s = f(I_a)$ côté sortie :



Par le diviseur de courant:

$$I_s = - \frac{(\alpha I_a) \cdot Y_{RC}}{Y_{RC} + Y_{R1}} = - \frac{(\alpha I_a) \cdot R_1}{R_1 + R_c} \quad (9)$$

- $I_e = f(I_a)$ côté entrée :



Par le diviseur de courant:

$$I_a = \frac{I_e Y_{Ra}}{Y_{Ra} + Y_{Rb}} = \frac{I_e \cdot R_b}{R_a + R_b} \quad (10)$$

D'après 9 et 10 on peut en déduire que:

$$G_I = - \frac{\alpha R_1 R_b}{(R_1 + R_c) (R_a + R_b)}$$

4. Calcul du gain en tension composite sans charge:

$$G_{V-C} = \left(\frac{V_s}{e_g} \right)_{R_c = \infty} = \left(\frac{V_s}{V_e} \right) \cdot \left(\frac{V_e}{e_g} \right)_{R_c = \infty}$$

-D'après la question 2: $\left(\frac{V_s}{V_e} \right) = G_V = \alpha \frac{R_1}{R_a}$

-Il faut trouver $V_e = f(e_g)$

On a: $\underline{V}_e = (R_a // R_b) \cdot i_e$ alors que : $i_e = \frac{e_g}{R_g + (R_a // R_b)}$ Ainsi:

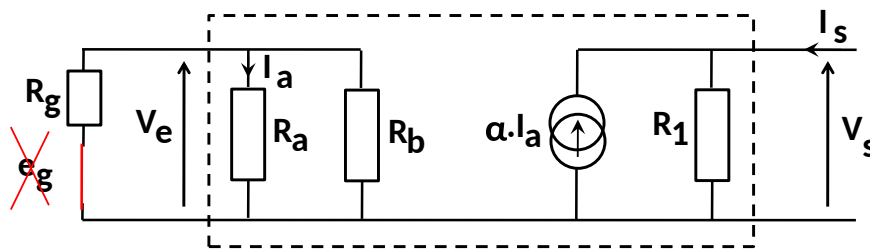
$$\underline{V}_e = \frac{(R_a // R_b) \cdot e_g}{R_g + (R_a // R_b)} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{V}_e}{e_g} = \frac{(R_a // R_b)}{R_g + (R_a // R_b)}$$

Enfin:

$$\underline{G}_{V-C} = \alpha \frac{R_1}{R_a} \cdot \frac{(R_a // R_b)}{(R_g + (R_a // R_b))} = \frac{\alpha R_1 R_b}{R_a R_b + R_a R_g + R_b R_g}$$

5. L'impédance de sortie du quadripôle sans charge $\underline{Z}_s$:

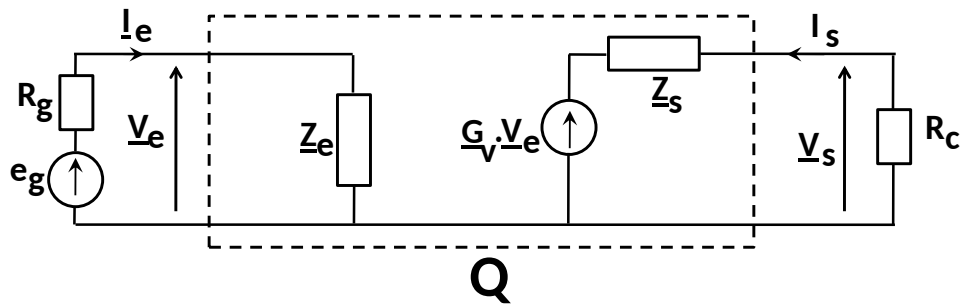
l'impédance de sortie, $\underline{Z}_s$, est l'impédance "vue" par la charge, sachant que l'entrée est fermée par l'impédance du générateur $\underline{Z}_G$ (source éliminée)



Côté entrée on $i_a = 0$ car le réseau électrique est constitué exclusivement de résistance et pas de source. En conséquence le générateur lié $\alpha i_a = 0$ est ouvert et donc $\underline{V}_s = R_1 i_s$:

$$\underline{Z}_s = R_1$$

6. Schéma équivalent du quadripôle:



Avec:

$$\underline{Z}_e = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$$

$$\underline{G}_V = \alpha \frac{R_1}{R_a}$$

et

$$\underline{Z}_s = R_1$$

