Formes quadratiques

Tuesday, October 18, 2022 7:57 PM

Matrice d'une forme bilinéaire :

Soit E un e.v de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. $b : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, soit $x \in E$. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad x_i \in \mathbb{K}$.

$y \in E \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad y_i \in \mathbb{K}$.

$\begin{pmatrix} b(e_1,e_1) \\ e_1, e_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

Calculons $b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i ; \sum y_i e_i\right)$

$$= b(x_1e_1 + \dots + x_ne_n ; y_1e_1 + \dots + y_ne_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b(x_ie_i, y_1e_1 + \dots + y_ne_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i, y_1e_1 + \dots + y_ne_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} b(e_i, y_je_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j b(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

l'ensemble des formes bilinéaires

$$\forall b \in B(E), \quad b(x,y) = \sum_i \sum_j x_i y_j b(e_i,e_j)$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^tX \, Mat_B(b) \, Y.$$

donc b est symétrique alors $Mat_B(b)$ est symétrique.

$$Mat_B(b) = (b(e_i,e_j))_{i,j} = (b(e_j,e_i))_{i,j} = {}^tMat_B(b)$$

$S(E)$: l'espace des formes bilinéaires symétriques.

Formes quadratiques : une forme quadratique est l'application $q : E \to E$ tq il existe une forme b s tq : $q(x) = \underbrace{b(x,x)}$ ← forme polaire de q.

si q est une forme quadratique, alors : $b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$ est la forme polaire associée à q.

la matrice de la forme quadratique q est la matrice de sa forme polaire.

si on note $Q(E)$: {l'ensemble des formes quad sur E}.

$Q(E) \cong S(E)$.

- Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique et b sa forme polaire

$$q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 q(x).$$

et $q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y)$
$= q(x) + q(y) + 2b(x,y)$.

Donc q n'est pas linéaire.

Exemple : $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{X} \to x_1^2 + x_2^2 + x_2 x_3$

c'est une forme quadratique.

en effet, on a : $\frac{1}{2}\left(q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) - q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(q\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_2+y_2)(x_3+y_3) \dots \right]$$

$$b(x,y) = b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{1}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2)$$

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(x_2 x_3 + x_3 x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(2 x_2 x_3)$$

forme polaire associée à une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

$q(x) = x$

$x = (x_1, x_2, x_3)$.

$$x_i^2 = x_i y_i$$
$$x_i x_j = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$$

$b(x,y) = x_i y_i \quad \frac{1}{2}$

Orthogonalité : Soit $b : E \times E \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire symétrique.

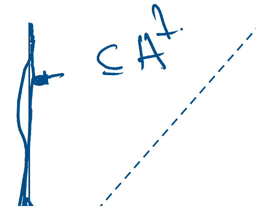
on dit 2 éléments x, y de E sont orthogonaux par b si :

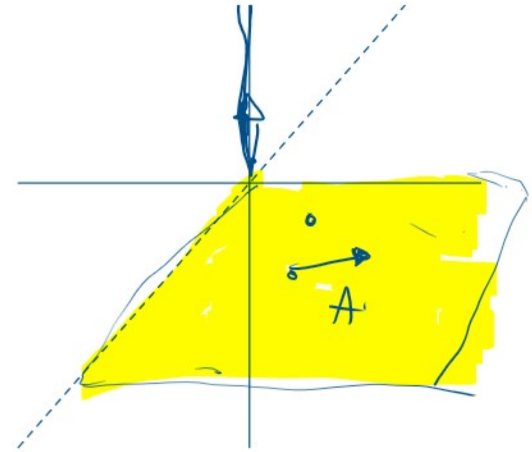
$$b(x,y) = 0.$$

si b est un produit scalaire on écrit $x \perp y \iff \langle x,y \rangle = 0$.

Soit donc : $A \subseteq E$. on définit $A^\perp = \{ y \in E \mid b(x,y) = 0 \ \forall x \in A \}$.

l'orthogonal de A par la forme b.

 $\subseteq A^\perp$



Exercice 20. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = tr({}^tAB)$.

1. Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices symétrique. ${}^tA = A$.

$A_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices antisymétriques. ${}^tA = -A$. $(\mathrm{diag}(A) = 0)$

soit $A \in (S_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, alors : $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$: $\langle A, M\rangle = 0$

pour $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$: $tr({}^tAB) = 0$.

on prend $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ${}^tAB = {}^tA$ alors $tr({}^tA) = 0$.

$a + d = 0$.

$a = -d$.

pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$${}^tAB = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

donc : $tr({}^tAB) = tr\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = a$

$(S_n(\mathbb{R}))^{\perp} \longrightarrow \langle A, B\rangle = 0$, $S_n(\mathbb{R})$

$\| \; 0$

$a = 0 \Rightarrow -d = 0 \Rightarrow d = 0$

$A \in (S_2(\mathbb{R}))^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$ $c = -d$. $\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R})$

$A \in (S_2(\mathbb{R}))^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & \\ d & 0 \end{pmatrix}$ $\quad c = -d. \quad \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$

Soit $A \subseteq E$. $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de A.

$x - y \in A^{\perp} \ \forall x, y \in A^{\perp}$. $\quad \lambda x \in A^{\perp} \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

$b(\,;\,)$

$x \perp_b y$. $b(x,y) = 0$

si $x, y \in A^{\perp}$, $x - y \in A^{\perp}$. soit $a \in A$. alors:

$b(x-y, a) = 0$

$\forall a \in A$.

$b(x-y, a) = b(x,a) - b(y,a)$ $\qquad (x-y) \perp a \ \forall a \in A$.

$= 0 - 0 = 0.$

$\Rightarrow x - y \in A^{\perp}$

$b(\lambda x, a) = \lambda b(x,a) = 0$

si $x \in A^{\perp}$, alors $\lambda x \in A^{\perp}$.

- $A, B \subseteq E$ $\left((A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \right)$: mq: si $A \subseteq B$ alors $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

Soit $x \in B^{\perp}$. alors: $\underbrace{\forall y \in B : b(x,y) = 0}_{\text{définition de } B^{\perp}}$ or $A \subseteq B$ donc, $\forall y \in A : b(x,y) = 0$.

donc: $x \in A^{\perp}$ donc $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

- $A^{\perp} = (\mathrm{vect}(A))^{\perp}$ $\qquad A \subseteq \mathrm{vect}(A) \Rightarrow (\mathrm{vect}(A))^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

réciproquement: soit $x \in A^{\perp}$. mq: $x \in (\mathrm{vect}(A))^{\perp}$.

Soit $y \in \mathrm{vect}(A)$. alors: $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ avec $a_i \in A$. $\quad A^{\perp} \quad A$.

$b(x,y) = b(x, \sum_i \lambda_i a_i) = \sum_i b(x, \lambda_i a_i) = \sum_i \lambda_i b(x, a_i)$.

$\quad ''$

Al. : $b(x, a_i) = 0 \ \forall i$ car. $x \in A^\perp$. et $a_i \in A \ \forall i$.

$$b(x, y) = 0 ; \forall y \in \text{vect}(A) \Rightarrow x \in \underbrace{(\text{vect}(A))^\perp} \quad \underbrace{\forall x \in A^\perp}$$

donc. $A^\perp \subseteq (\text{vect}(A))^\perp$. D'où l'égalité.