Séance 1

samedi 4 mars 2023 17:15

Conforme avec le programme des ENSA(M) et FS(T)s

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Oubouhou el houssaine

TD Algèbre 2 (Les matrices)

Offre Be In Sciences

Inscription ouverte

Receuil des exercices :

Exercice 1

On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer, s'ils ont un sens, les produits AB, BA, AC, CA, B^2.

Exercice 2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^2 = 2A + 3I_4$
2. Déduire que A est inversible et calculer son inverse

Exercice 3

On considère l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 3 défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$ $= aI_3 + bJ.$

1. Montrer que Eest un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.
2. Justifier que les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ forment une famille génératrice de E}$$

Exercice 4

On considère les matrices à coefficients complexes données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & i \\ i & 1 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & i & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire les matrices transposées de A et B.
2. Calculer les produits AB^t et BA^t.

Exercice 5

Ex1 :

AB est définie si la tailles des lignes de B est egale a celle des collones de A.

On trouve. $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$CA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. (Rq : $AC \neq CA$)

les deux autres produits B^2 et BA n'ont pas sens.

Ex 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2A + 3I_4.$$

$$\boxed{A^2 = 2A + 3I_4}$$

2) On a : $A^2 = 2A + 3I_4$.

donc $A^2 - 2A = 3I_4$

$$\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A = I_4.$$

d'où $$A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4\right) = \left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4\right)A = I_4.$$

Donc A est inversible et de plus $A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Ex 3 : • $M_{(0,0)} = O_{M_3(\mathbb{R})} \in E$

• Soit $M(a,b), M(c,d) \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $$M_{(a,b)} + \alpha M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d & b+\alpha d \\ b+\alpha d & a+\alpha c & b+\alpha d \\ b+\alpha d & b+\alpha d & a+\alpha c \end{pmatrix} = M_{(a+\alpha c,\, b+\alpha d)} \in E$$

donc E est un s.e.v de $M_3(\mathbb{R})$.

2) On a : $\forall a, b \in \mathbb{R}$. $M_{(a,b)} = aI_3 + bJ$.

donc $$E = \{ aI_3 + bJ \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$
$$= \text{Vect}(I_3, J).$$

d'où E est engendré par $\{I_3, J\}$.

• Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha I_3 + \beta A_3 = 0$

• Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha I_3 + \beta J_3 = 0$

c-à-d $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\alpha = \beta = 0$.

donc $\{I_3, J\}$ est libre, et par suite c'est une base de E.

Ex 4 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & i \\ i & 1 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & i & 2 \end{pmatrix}$

1) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ i & 1 & 3i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix}$; $B^t = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 3 & 3i & i \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 3 & 3i & i \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4i & -4 & 1-i \\ 3+i & -1+3i & 3+i \\ 2+12i & -6+2i & 3+i \end{pmatrix} ?$$

de même $BA^t = ?$

Ex 5 :

$A = I_3 + B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dots$$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$B^2 = 3B$.

$$B^3 = B^2 \times B = 3B \times B = 3B^2 = 3^2 B.$$

d'où par récurrence, on obtient que $B^n = 3^{n-1} B$.

3) « $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$ où $AB = BA$ ».

On a : $A^n = (I_3 + B)^n$. Comme $I_3 \cdot B = B \cdot I_3 = B$

alors la formule de binôme de Newton est applicable

On a : $A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k}$.

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$$

$$= I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k . 3^{k-1} B.$$

« $(a+1)^n = \sum C_n^k a^k$ » $= I_3 + \frac{1}{3} B \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k - 1 \right)$.

« $(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k$ » $= I_3 + \frac{1}{3} B \left(\sum_{k=0} C_n^k 3^k - 1 \right).$

$\forall a \in \mathbb{R}$ ».

$= I_3 + \frac{(3+1)^n - 1}{3} B.$

d'où $A^n = I_n + \frac{4^n - 1}{3} B.$

Soit $A = I_3 + B$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et I_3 est la matrice identité d'ordre 3 .

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que B^n est un multiple de B.
3. En déduire A^n.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 et trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0.$$

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7

On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que P et Q sont inversibles et calculer leurs inverses.

Exercice 8

Soient U_0, V_0 et W_0 trois nombres réels donnés. On consi dère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liées par les relations de récur rence :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + V_{n-1} \\ V_n = V_{n-1} + 2W_{n-1} \\ W_n = W_{n-1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui permet d'écrire le système sous la forme :

$$X_n = MX_{n-1}$$

2. Calculer les puissances successives de A, où $A = M - I_3$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de M^n.

2. Calculer les puissances successives de A, où $A = M - I_3$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de M^n.
4. En faisant un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n, V_n$ et W_n en fonction de U_0, V_0 et W_0.

Ex 6: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \quad + bA + cI_3.$

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = 3A + I_3.$

donc $A^3 - 3A - I_3 = 0.$

c-à-d $a = 0$, $b = -3$ et $c = -1$.

2)

On a : $A^3 = 3A + I_3.$

donc $A^3 - 3A = I_3.$

c-à-d : $A(A^2 - 3I_3) = (A^2 - 3I_3)A = I_3.$

donc A est inversible et de plus $A^{-1} = A^2 - 3I_3.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ex 7:

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$PX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 - x_2 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_1 + y_2 & L_1 + L_2 \\ x_2 - 2x_3 = y_3 - y_1 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_1 + y_2 \\ -3x_3 = -2y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - x_3 = \frac{-y_1}{3} - \frac{5}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{y_3}{2} \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{y_2}{3} - \frac{y_3}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -5/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -5/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$?

de même pour Q.

Ex 8 :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + V_{n-1} \\ V_n = V_{n-1} + 2W_{n-1} \\ W_n = W_{n-1} \end{cases}$$

$w_n = w_{n-1}.$

1) • $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

c-à-d $X_n = M X_{n-1}$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On a : $A = M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

donc $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\forall n \geq 3$.

3) $M^n = (A + I_3)^n$? puisque A et I_3 commutent.

La formule de binôme est applicable et on a :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k I_3^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k =$$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= C_n^0 A^0 + C_n^1 A^1 + C_n^2 A^2 + (0 + 0 \dots)$$

$$= I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2.$$

4) On a : $X_n = M X_{n-1}$

$$= I_3 + n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2.$$

4) On a : $X_n = M X_{n-1}$

alors par recurrence on trouve $X_n = M^n X_0$.

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_0 + n v_0 + n(n-1) w_0 \\ v_0 + 2n w_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{cases} u_n = u_0 + n v_0 + n(n-1) w_0 \\ v_n = v_0 + 2n w_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}$$

Ex 9 :

$$rg(A) = rg(\overbrace{(1,3,4)}^{L_1}, \overbrace{(2,4,6)}^{L_2})$$

On vérifier que (L_1, L_2) est une famille libre.

donc $rg(A) = 2$. $\quad Vect(e_1, e_2, e_3) = Vect(e_1, e_2)$

de même $rg(B) = 2$.

$rg(A) = rg((1,3,4), (2,4,6))$

$rg(A) = rg((1,3,4), (2,4,6))$

Exercice 9

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$rg(A) = rg(\text{les collones de } A)$. $\cdot\ rg(A) + \dim(\ker A) = n$.

$= rg(\text{les lignes de } A)$.

$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est inversible } A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \text{ssi } rg(A) = n. \end{array} \right.$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Soient B_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$.
1. Montrer que B_1 est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les matrices de passage de B_0 à B_1 et de B_1 à B_0.

Exercice 11

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'_0 = \{(1,0,1),(-1,1,0),(1,1,0)\}$ est une base $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice B de u dans $\mathcal{B}'_0$.
3. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (i,j,k)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les vecteurs $e_1 = (1,0,1), e_2 = (-1,1,0)$ et $e_3 = (3,1,0)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}_1 := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
c) Calculer C^n pour tout entier naturel n.

2. a) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.
b) Calculer P^{-1}.
c) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] / P = 0 \text{ ou } \deg(P) \leq n\}$$

Soit $f : \mathbb{C}_3[X] \longrightarrow \mathbb{C}_2[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{C}_3[X]$, par

$$f(P) = P' - P''$$

1. Vérifier que f est linéaire et calculer la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ et $\mathcal{B}'_0 = \{1, X, X^2\}$.
2. Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(S) = 3$. Démontrer que $\mathcal{B} = \left\{S, S', S'', S^{(3)}\right\}$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$ et que $\mathcal{B}' = \left\{S', S'', S^{(3)}\right\}$ une base de $\mathbb{C}_2[X]$. Ecrire la matrice de f dans ces deux bases.

Exercice 14

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'_0 = \{(1,0,1), (-1,1,0), (1,1,0)\}$ est une base $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice B de u dans $\mathcal{B}'_0$.
3. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
3. Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que A et B sont inversibles et calculer B^n et A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.