Notation: Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, on note $A = (C_1, \dots, C_n)$ où C_j est la j-ème colone de A.

Théorème: Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$. appelée déterminant et notée **det**, vérifiant les deux propriétés suivantes:

(1) pour tout sclaires α, β dans $\mathbb{K}$, pour tous vecteurs.

$C_1, \dots, C_j, C_j', \dots C_n \in M_{n1}(\mathbb{K})$, On a:

$$\det(C_1, \dots, \alpha C_j + \beta C_j', \dots C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_n) + \beta \det(C_1, \dots, C_j', \dots C_n)$$

L'application det est dit linéaire % à chaque colonne.

(2) S'il existe deux indices $j \neq k$, avec $C_j = C_k$, alors.
On a: $\det(C_1, \dots, C_n) = 0$.

(3) $\det(I_n) = 1$.

Notation: Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, Son déterminant $\det(A)$ est noté

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calcul des déterminants d'ordre 2:

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = ad - bc$.

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(A) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1$.

Calcul des déterminants d'ordre supérieurs :

Notation : $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, On note A^{ij} la matrice d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en suprimant la ligne i et la colonne j de A.

Exemple : $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&3&4\\5&6&0\end{pmatrix}$ On a :

$$A^{11}=\begin{pmatrix}3&4\\6&0\end{pmatrix} ; \quad A^{21}=\begin{pmatrix}0&-2\\6&0\end{pmatrix} ; \quad A^{32}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&4\end{pmatrix}.$$

Théorème :

(1) pour tout $i=1,\dots,n$ on a :

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$$

C'est le dévelopement du déterminant % à la ligne i.

(2) pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$ On a :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$$

Exemple : $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&1&3\\4&3&5\end{pmatrix}$.

$$\det(A)=(-1)^{1+1}\times1\times\begin{vmatrix}1&3\\3&5\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times(-1)\times\begin{vmatrix}-2&3\\4&5\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(2)\begin{vmatrix}-2&1\\4&3\end{vmatrix}.$$

$$=-4+(-22)+2(-20)=-46$$

Corollaire : Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inferieure (ou superieure), Alors on a :

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Pour $n=3$, On a une autre méthode pour calculer $\det(A)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Alors $\det(A) = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{21} \times a_{32} \times a_{13}) + (a_{31} \times a_{12} \times a_{23})$

$- [a_{13} \times a_{22} \times a_{31} + a_{32} \, a_{32} \, a_{11} + a_{33} \, a_{12} a_{23}]$.

Corollaire: (1) $\det(A) = \det({}^tA)$.

$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

(2) le $\det(A)$, ne change pas en ajoutant à l'une des lignes (resp. colonnes) de A une combinaison linéaire des autres lignes (resp., colonnes).

(3) $\det(A) \neq 0$ ssi A est inversible. ssi les vecteurs lignes (resp, colonnes) de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple:

(1) calculer $\det(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $B = \{ \underbrace{(1,1,2)}_{e_1}, \underbrace{(2,4,4)}_{e_2}, \underbrace{(3,5,7)}_{e_3} \}$

M.que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution:

(1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$

$= 2$

(2) On a $\det(A) = 2 \neq 0$. donc les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3), avec $e_1 = (1, 1, t)$, $e_2 = (1, t, 1)$ et $e_3 = (t, 1, 1)$. Dire pour quelles valeurs de t la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

puisqu'on est en dimension 3, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre

ssi c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit M la matrice de ces

trois vecteurs ie $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi M est inversible

ssi $\det(M) \neq 0$.

Mais On a :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-t^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - tL_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t-1 & 1-t \\ 1-t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-t & \underbrace{1-t^2}_{(1-t)(1+t)} \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1+t \end{vmatrix}$$

$\det(M_t) = -(1-t)^2(t+2)$

$\det(M_t) = 0 \iff t = 1, -2.$

donc la famille B est une basse ssi $t \neq 1$ et $t \neq -2$.

Exercice 2

Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$

$C_1 \leftrightarrow C_1 + C_2$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ t-2 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix}.$$

$$\det(f(t)) = \begin{vmatrix} 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & -6 & t+4. \end{vmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$$

$$= (t-2) \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 0 & t+4 \end{vmatrix} = (t-2)^2 (t+4).$$

Exercice 3

1. Soit $v_1 = (2, 1)$ et $v_2 = (1, 2)$, vérifier que (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer selon le paramètre du réel α si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante est libre ou liée
$$v_1 = (4, -1, 3), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (\alpha, 1, \alpha - 2)$$
3. Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$
est inversible. Dans ce cas, calculer $\det(B^{-1})$ puis $\det(B^{-2})$ et $\det(B^{-3})$ (Sans calculer B^{-1})
4. Soient $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$
(a) Donner une base de $F = \text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$
(b) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$. Monter que $u \in F \Leftrightarrow y + z + t - x = 0$

$\Updownarrow \ (v_1, v_2, v_3, u)$

(1) On a : $\det(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) On a : $\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 10 & \alpha+4 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 \\ 0 & 7 & \alpha+1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_1 + 4L_2. \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+2} \times (-1)}_{1} \begin{vmatrix} 10 & \alpha+4 \\ 7 & \alpha+1 \end{vmatrix}$$

$$= 10\alpha + 10 - 7\alpha - 28.$$

$$= 3\alpha - 18.$$

Ainsi si $\alpha = \frac{18}{3}$, la famille (v_1, v_2, v_3) est lié

si $\alpha \neq \frac{18}{3}$, la famille est libre.

3) On a : $\det(B) = \det({}^tB) = 3\alpha - 18$.

donc B est inversible ssi $\alpha \neq \frac{18}{3}$.

et dans ce cas. On a :

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{3\alpha - 18}.$$

et $\det(B^{-2}) = (\det(B^{-1}))^2 = \frac{1}{(3\alpha-18)^2}$

de même $\det(B^{-3}) = \frac{1}{(3\alpha-18)^3}$ ...

4) a/ Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = O_{\mathbb{R}^4}$.

c-à-d $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$

donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, donc c'est une base de F.

b) $u \in F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \overset{?}{\iff} (v_1, v_2, v_3, u)$ est liée.

<< $\Rightarrow$ claire.

$\Leftarrow$ $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq (0,0,0,0,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i + \alpha_4 u = 0$.

si $\alpha_4 = 0$ alors. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$ et $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 0$ absurde.

car (v_1, v_2, v_3) est libre, donc $\alpha_4 \neq 0$.

d'où $u = -\frac{\alpha_1}{\alpha_4} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} v_3 \in F$ >>

$$\Longleftrightarrow \det(v_1, v_2, v_3, u) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

$L_1 - L_2 - L_3 - L_4$.

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-y-z-t \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow (-x+y+z+t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow -x+y+z+t = 0.$$

Exercice 4

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad (b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad (c) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad (e) \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad (f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Ex4 :

(a)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$$
$$= abc + abc = 2abc.$$

(b)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix}.$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)).$$

(c).
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}.$$

$a+b$

$$= \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ c^2 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc\,(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix}.$$

$$= 2abc\,(a-c)(b-c)(b-a).$$

(d) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}.$$

$$= a(b-a)(c-b)(d-c).$$