# Espace Euclidiens:

## - Produit scalaire:

Déf: Soit $E$ un e.v sur un corps $\mathbb{K}$. L'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme:

1) bilinaire: si elle linéaire % à chaque coordonnée

2) Symétrique: $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall x,y \in E$.

3) positive. si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(x,x) \geq 0$.

4) définie positive: $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x,y) > 0$.

c-à-d positive $\oplus$ $f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

déf; $E$ un e.v. sur $\mathbb{R}$. On appelle un produit scalaire sur $E$, tout application noté $\langle , \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui symétrique, bilinaire, définie positive.

- $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

- si $\dim E < \infty$, $(E, \langle , \rangle)$ c'est un espace Euclidien.

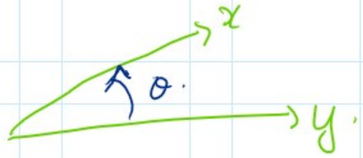
Exp: $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique $\langle , \rangle$. définie par $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum^{n} x_i y_i$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- cas particulier : $n = 2$.

$\langle X, Y \rangle = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos\theta$, tel que $\theta$ est l'angle entre $X$ et $Y$




**Ex2 :** $E$ un e.v. de dimension $n$, et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ avec}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

**Ex3 :** $E = M_n(\mathbb{R})$. $\langle A, B \rangle = tr({}^tA B)$.

il est facile de vérifier que $f$ est une forme bilinéaire symétrique

- Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$ alors.

$$\langle A, A \rangle = tr({}^tA\, A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 > 0.$$

**Ex4 :** $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx.$$

**Rq :** $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et

$E$ de dimension finie, $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$.

$\sum^{n} \quad \sum^{n}$

E de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

alors $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y\right)$.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j).$$

$$= {}^t X M Y.$$

avec $M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$

Rq : 1) $q(x) = f(x,x)$ est la forme quadratique associé à $f$.

2). $f$ est symétrique ssi $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) \ \forall i \neq j$

ssi $M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique.

Exp: $f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{a_{ij}}$

$$= a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n.$$

Exp: $f(X,Y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + 5 x_1 y_2 + 5 x_2 y_1$

est symétrique car les coefficients de $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont les mêmes. Elle est aussi bilinéaire car dans tous les monômes $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ les degrés de $x_i$ et $y_j$ sont égaux à 1

Ex: $f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2 x_1 y_2 + 3 x_2 y_1$

alors $f$ est bilinéaire mais elle n'est symétrique.

Question: soit $(E, \langle , \rangle)$ un e.E. Est ce qu'il existe une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $E$ dans laquelle $\langle , \rangle$ s'écrit sous la forme. $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Def: Soit $(E, \langle , \rangle)$ un e.v.

1) soit $x \in E$, Puisque $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ alors posons:
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ : $\|\cdot\|$ s'appelle la norme associé au $\langle , \rangle$.

2) $d(x,y) = \|x - y\|$.

« Régle de calcul » $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.

Identités remarquables:

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$.

$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y \rangle$.

ii) Identités de polarisation:

$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

iii/ Identité du parallélogramme:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

**Déf :**

1) deux vecteurs $x$ et $y$ sont dit orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$ et sera noté $x \perp y$.

2). une base $\{e_1,\dots,e_n\}$ est dite orthogonale si

$$\forall i \neq j, \quad \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

3). une base $\{e_1,\dots,e_n\}$ est orthonormé si

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

**Exp :**

1/ $\{e_i\}$ une base orthogonale de $E$. alors $\left\{\dfrac{e_i}{\|e_i\|}\right\}$ est une base orthonormée.

2) $\{v_1,\dots,v_n\}$ une famille de vecteurs non nul deux à deux orthogonaux, alors $\{v_1,\dots,v_n\}$ est libre.

3) $\{e_1,\dots,e_n\}$ est orthonormé ssi $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

**Th :** Dans un espace Euclidien, il existe toujours une base orthonormée.

- Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une base de $E$.

$$u_1 = v_1 \longrightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_1 = v_1 \longrightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \longrightarrow e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 \longrightarrow e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$$\vdots$$

**Ex:** Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

en effet : $\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Appliquons le procédé de Gram-Schmidt pour déduire une base orthonormée . . .