Td1

dimanche 22 octobre 2023 19:57

Exercice 1

Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lesquelles sont des formes bilinéaires, des formes bilinéaires symétriques ?

1. $f_1 : (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longmapsto 4x_1y_1 + 9x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1x_3 + 2x_1y_3 + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$
2. $f_2 : (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longmapsto 4x_1y_1 + 9x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 + y_1x_3 + x_1y_3 + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$
3. $f_3 : (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longmapsto 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + 1 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3.$
4. $f_4 : (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \longmapsto 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 + y_3x_1.$

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X, Y \longrightarrow f(X, Y)$$
où $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} a_{ij}\, x_i y_j \ .= {}^tX\, M\, Y.$$

f est symétrique <u>ssi</u> $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall\, i \neq j$

1) f est bilinéaire mais elle n'est pas symétrique.

2) f_2 est bilinéaire mais elle n'est pas symétrique.

3) f_3 n'est pas bilinéaire

4) f_4 est une forme bilinéaire symétrique.

Exercice 2

Soient E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2) et f la forme bilinéaire définie sur E en posant pour tout élément $(x, y) \in E^2$, avec $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$,

$$f(x, y) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2. = 33 \times 4 - 14(20 + 8 \times 25 = 2.$$

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base (e_1, e_2).
2. Montrer que les vecteurs $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = 2e_1 + 5e_2$ forment une base de E.
3. Ecrire la matrice de f par rapport à la base (f_1, f_2) de E.
4. Donner l'expression de la forme quadratique q, associée à f, par rapport à chacune des bases (e_1, e_2) et (f_1, f_2).

1) $M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$

2) On a $\det(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0.$

donc la famille $\{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3)

$$f(f_1, f_1) = 1$$

$$f(f_1, f_2) = f(f_2, f_1) = 0$$

$$f(f_2, f_2) = 2.$$

donc $M_{(f_1, f_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2ème methode : la matrice de passage de (e_1, e_2) à (f_1, f_2) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

$$M_{(f_1, f_2)}(f) = {}^tP \, M_{B_2}(f) \, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $X = a_1 f_1 + a_2 f_2$ et $Y = b_1 f_1 + b_2 f_2$.

alors : $f(X, Y) = a_1 b_1 + 2 a_2 b_2.$

4) $X = (x_1, x_2).$

$$q(X) = f(X, X) = 33 x_1^2 - 28 x_1 x_2 + 6 x_2^2.$$

$$X = x_1 f_1 + x_2 f_2$$

$$q(X) = x_1^2 + x_2^2.$$

Exercice 3

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$$

1. Ecrire la forme polaire de f associée à q.
2. Ecrire la matrice A de q relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une réduction de Gauss de q.
4. Donner la signature et le rang de q.
5. La forme quadratique q est-elle non dégénérée? Justifier.
6. Donner une base q-orthogonale.

1) . $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$f(X,Y) = x_1y_1 - x_2y_2 - (x_2y_3 + x_3y_2) - 2(x\,y_3 + x_3y_1).$$

2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) On : $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$.

$$= x_1^2 - 2x_1(2x_3) + 4x_3^2 - 4x_3^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2$$

$$= (x_1 - 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - (\sqrt{3}\,x_3)^2.$$

4). On a la signature de q est $\operatorname{sgn}(q) = (1, 2)$ car dans la réduction de Gauss dan 3). on a un carée positif et deux carées négatifs.

Ainsi $rg(q) = 1 + 2 = 3$.

5) . On a : $rg(q) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. donc q est non dégénérée

6). Posons : $\begin{cases} X = x_1 - 2x_3 \\ Y = x_2 + x_3 \\ Z = \sqrt{3}\, x_3. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = X + \frac{2}{\sqrt{3}} Z \\ x_2 = Y - \frac{1}{\sqrt{3}} Z \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} Z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$

donc $\left((1,0,0),(0,1,0),\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est une base q-orthogonale.

Exercice 4

Soit q la forme quadratique définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]; q(P) = P'(0)P(1)$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\{1 - X^2\}$ est une base du noyau de q et en déduire le rang de q.

$C(q) = \{P \in E \ / \ q(P) = 0\}.$

3. Déterminer le cône des vecteurs isotropes $C(q)$.
4. Déterminer une base de E formée de vecteurs isotropes.
5. $C(q)$ est-il un sous-espace de E.
6. Posons $e_1 = 1 - X^2 \in \ker(q)$ et $e_2 = 1 + X$. Chercher une base de $\{e_1, e_2\}^{\perp}$. $= \{P \ / \ \varphi(e_i, P) = 0\}.$
7. Déterminer une base q-orthogonale. Quelle est la signature de q ?

1) On a : $\forall P \in E$: $q(P) = P'(0) \cdot P(1).$

Soit φ la forme bilinéaire symétrique associée à q. alors :

$$f(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{P'}(0)\,Q(1) + \overset{2X}{Q'}(0)\,\underline{P}(1)\right).$$

- donc la matrice de q dans la base canonique. $B_0 = (1, X, X^2)$

est définie par :

$$M_{B_0} q = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,X) & f(1,X^2) \\ f(X,1) & f(X,X) & f(X,X^2) \\ f(X^2,1) & f(X^2,X) & f(X^2,X^2) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2/

$P = x + yX + zX^2 \in \mathrm{Ker}(q) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2} y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff P = x - xX^2 = x(1 - X^2)$$

d'où $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Vect}((1-X^2))$.

donc $\mathrm{rg}(q) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,q) = 3 - 1 = 2.$

3) $C(q) = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ q(P) = 0 \}$.

$= \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P'(0)\, P(1) = 0 \}$.

$= \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \begin{matrix} P'(0) = 0 \\ \text{ou} \\ P(1) = 0 \end{matrix} \right\}$.

$\hookrightarrow = \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \ / \ \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

$= \{ a_0 + a_2 X^2 \ / \ a_0, a_2 \in \mathbb{R} \} \cup$

$\{ a_1 (X-1) + a_2 (X^2 - 1) \ / \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$.

$= \text{Vect}(1, X^2) \cup \text{Vect}((X-1), (X^2-1))$.

3) On a : $(1, X-1, X^2)$ est une base de E. qui formé des vecteurs isotrope.

4). $1 \in C(q)$ et $X - 1 \in C(q)$ or $X \notin C(q)$.

car $q(X) = 1 \neq 0$.

donc $C(q)$ n'est un sous espace vectoriel de E.

donc $C(q)$ n'est un sous espace vectoriel de E.

5) $P = a_0 + a_1 X + a X^2 \in \{e_1, e_2\}^\perp$ $\quad$ $e_2 = 1 + X$.

$f(P,Q) = \frac{1}{2}\left(P'(0)Q(1) + Q'(0)P(1)\right)$.

$\iff f(e_1, P) = f(e_2, P) = 0$.

« on $e_1 \in \operatorname{Ker} q$ donc $f(e_1, P) = 0$. »

$\iff f(e_2, P) = 0$.

$\iff \frac{1}{\cancel{2}}\left(a_0 + a_1 + a_2 + 2a_1\right) = 0$.

$\iff a_0 + 3a_1 + a_2 = 0 \iff a_0 = -3a_1 - a_2$.

$\iff P = -3a_1 - a_2 + a_1 X + a_2 X^2$.

$= a_1(-3 + X) + a_2(-1 + X^2)$.

donc $\{e_1, e_2\}^\perp = \operatorname{Vec}\{\underbrace{X - 3}_{e_3}, e_2\}$.

6) • On a : $f(e_1, e_2) = 0$ car $e_1 \in \operatorname{Ker} q$ et

$f(e_1, e_3) = f(e_2, e_3) = 0$.

et on vérifie facilement que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

donc $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base q-orthogonale.

• $M_B q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} rg(q) = 2. \\ Sg(q) = (1, 1) \end{array}$

Exercice 5

(Exercice II, c.f 2016-2017 10 pts): Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = 10xy + 6yz$$

1. Déterminer la forme polaire f associée à q et donner sa matrice canonique.
2. Donner une base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\beta,\beta}(f)$ est diagonale.
3. En déduire le rang, le noyau et la signature de q.
4. Écrire q comme une combinaison linéaire de carrées de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes.

Exercice 6

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$A = \quad q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4xy - 2xz.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la forme polaire de q.
3. Réduire q en somme de carrés. En déduire la signature de q et une base q-orthogonale.

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2)

$$f\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 6x_3 y_3$$
$$+2(x_1 y_2 + x_2 y_1) - 1(x_1 y_3 + x_3 y_1).$$

3)

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4xy - 2xz$$
$$= x^2 + 2x(2y-z) + (2y-z)^2 - (2y-z)^2 + 6y^2 + 6z^2$$
$$= (x+2y-z)^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz + 6y^2 + 6z^2$$
$$= (x+2y-z)^2 + 2y^2 - 5z^2 + 4yz$$
$$= (x+2y-z)^2 + 2(y^2 + 2yz + z^2) - 7z^2$$
$$= (x+2y-z)^2 + 2(y+z)^2 - 7z^2$$
$$= 1\,\ell_1^2(x,y,z) + 2\,\ell_2^2(x,y,z) - 7\,\ell_3^2(x,y,z)$$

avec $\ell_1(x,y,z) = x + 2y - z$

$\ell_2(x,y,z) = y - z$

$\ell_3(x,y,z) = z$

« $Sg(q) = (2,1)$ et $rg(q) = 2 + 1 = 3$ ».

On pose

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= x + 2y - z \\ u_2 &= y + z \\ u_3 &= z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= u_1 - 2(u_2 - u_3) + u_3 \\ y &= u_2 - u_3 \\ z &= u_3 \end{aligned}\right.$$

$u_3 = z$.

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 + 3u_3 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

d'où $\big(\overbrace{(1,0,0)}^{a_1}, \overbrace{(-2,1,0)}^{a_2}, \overbrace{(3,-1,1)}^{a_3} \big)$ est une base q-orthogonale.

« $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$. ».

$M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz$$

1. Déterminer la forme polaire f associée à q et donner sa matrice canonique.

2. Utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire q comme une combinaison linéaire de carrées de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes.

3. Donner une base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\beta,\beta}(f)$ est diagonale.

4. En déduire le rang, le noyau et la signature de q.

Exercice 8

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = 10xy + 6yz$$

1 Déterminer la forme polaire f associée à q et donner sa matrice canonique.

2 Donner une base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\beta,\beta}(f)$ est diagonale.

3 En déduire le rang, le noyau et la signature de q.

4 Écrire q comme une combinaison linéaire de carrées de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes.