Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccatti

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

   (b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

$(E) : \iff \left(\frac{y'}{y^n}\right) + a(x)\frac{y}{y^n} + b(x) = 0.$

$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)} = y^{1-n}(x)$

$z'(x) = (1-n)\left(\frac{y'(x)}{y^n(x)}\right)$

$\iff \frac{1}{1-n} \cdot z'(x) + a(x) z(x) + \underline{b(x)} = 0.$ E.D.L. 1ʳ ordre avec second membre

Rq : si $n > 1$: $y = 0$: c'est solution de (E)

(2) $xy' + y - xy^3 = 0 \qquad (E)$

$x \cdot \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0.$

$z(x) = \frac{1}{y^2} > 0$

$z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$

$x \cdot \frac{z'}{-2} + z(x) - x = 0$

$x z'(x) - 2z(x) + 2x = 0.$

$\| x z'(x) - 2z(x) = -2x \|$

$z(x) = \lambda \cdot x^2 + 2x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$z(x) > 0$: sur $I_\lambda = \begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } \lambda = 0. \\ ]0, -\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda < 0 \\ ]-\infty, -\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0, +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$

$z(x) = \frac{1}{y^2} \iff y^2 = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x^2 + 2x}$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$$

y ne s'annule pas et continue. $\Rightarrow$ $y(x) = \frac{+1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ sur I_λ.

Rq : $y = 0$: solution de (E).

2. **Équation de Riccati**

(a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$ ✓ (E)

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

(b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

(1) Soit y_0 une solution de $y' + a(x)\, y + b(x)\, y^2 = c(x)$ (E)

Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$ donc : $y(x) = u + y_0$.

l'E. devient : $u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x).(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$.

Comme y_0 est sol particulière de (E) alors :

$$y_0' + a(x)\, y_0 + b(x)\, y_0^2 = c(x).$$

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)\, b(x))\, u + b(x).u^2 = 0$$

$$u' + A(x).u + B(x)\, u^2 = 0.$$

type Bernolli $n = 2$

2) $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ (E') sur $I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$y_0' - \frac{1}{x} y_0 + y_0^2 = \frac{-1}{x^2}$$: Forme de Ricatti.

* $y_0 = \frac{1}{x}$: sol. particulière $y_0' = -\frac{1}{x^2}$

$$-\frac{1}{x^2} - \cancel{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2}$$

* $u = y(x) - y_0(x)$ donc $y = u + y_0 = u + \frac{1}{x}$

$$x^2(y' + y^2) = xy - 1$$

$$x^2\left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x\cdot\left(u + \frac{1}{x}\right) - 1$$

qui se simplifie :

$$x^2\left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = x\cdot u.$$

$$u' + u^2 + \cancel{\frac{2u}{x}} = \cancel{\frac{u}{x}}.$$

$$"u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0." \text{ sur } I.$$

" type Bernoulli "

* si $u \neq 0$: $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{u} + 1 = 0$

$z(x) = \frac{1}{u} \Rightarrow -z'(x) + \frac{1}{x}\cdot z(x) + 1 = 0.$) E.D.L ASSM.

$z'(x) = -\frac{u'}{u^2}$

$$\Rightarrow z(x) = \lambda x + x\ln|x|. \quad (\lambda \in \mathbb{R}.)$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|}. \quad \text{et } u(x) = 0$$

* Conclusion : $y = u + \frac{1}{x}$ on obtient alors :

$$y(x) = \frac{1}{x}. \text{ ou } y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|}. \ (\lambda \in \mathbb{R})$$