Séance 7 : Equation différentiels

samedi 23 avril 2022 21:56

Définition :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 .$$ E.D d'ordre n.

$y : I \to \mathbb{R}$: solution.

y : n fois dérivable.

Eqtion à variable séparées :

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{y' . f(y)}_{y} = \underbrace{g(x)}_{x}$$

Exp :

$$x^2 . y' = e^{-y}$$

$$\underbrace{y' . e^{+y}}_{} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x}$$

$$\frac{dy}{dx} . e^{y} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int dy\, e^{y} = \int \frac{dx}{x^2} + c$$

$$e^{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\| \; y = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right) \; \|$$

Eqt° diff. linéaire :

$$a_0(x) . y + a_1(x) y' + a_2(x) y'' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = \underbrace{g(x)}_{}$$

Eqt° diff. linéaire homogène : (sans second membre)

$$a_0(x) y + a_1(x) y' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = 0 .$$

E.D.L. à coef. constant :

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = g(x)$$

$a_0, a_1, \dots a_n$: constante.

$a_0, a_1 .. a_n$: constante.

Exp : $y' + \sqrt{x}\, y = e^x$: EDL avec second membre : $g(x) = e^x$

$y' + \sqrt{x}\, y = 0$: ,, homogène.

$y'^2 - y = x$: ED Non linéaire.

Principe de linéarité :

y_1 et y_2 sont sol de l'E.D.L H : $a_0(x) y + a_1(x) y' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = 0$

alors : $\lambda y_1 + \mu y_2 \in S$. E.D.L.H.

Résolution : E.D.L.A.S.M :

$$a_0(x) y + a_1(x) y' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = g(x). \quad (E).$$

→ Trouver une solution particulière : y_p . de (E).

→ Trouver l'ensemble des solutions de l'E.D H : y_{SSM}

$$a_0 y + a_1 y' + \dots a_n y^{(n)} = 0.$$

→ $y_p + y_{SSM} \in S(E)$.

E.D.L du premier ordre :

$$y' = a(x) y + b(x)$$

2.1. $y' = ay$

$$\frac{dy}{dx} = a.y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a.\, dx \Rightarrow \ln|y| = ax + k.$$

$$\Rightarrow y = e^{ax+k} = e^{ax} e^{k} = C. e^{ax}.$$

2.2 $y' = a(x).y$.

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)\, dx \Rightarrow \ln|y| = \int a(x)\, dx + k.$$

$$y = k. e^{\int a(x) dx}$$

2.3. $y' = a(x) y + b(x)$

$y = k \cdot e$

2.3. $y' = a(x)\,y + b(x)$

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y \ : (E_0) \Rightarrow y_{SSH} = k\, e^{\int a(x)\,dx} \\ y_{ASSH} \end{cases}$$

$y' = 2xy + 4x \qquad y_p = -2$

Méthode de la variation de la constante:

$$y_{SSH}(x) = k \cdot e^{A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}. \qquad A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$y_p = k(x) \cdot e^{A(x)} \rightsquigarrow y'_p = k'(x) \cdot e^{A(x)} + \underline{\underline{a(x)}} \cdot k(x)\, e^{A(x)} \qquad A'(x) = a(x)$$

$$y'_p = a(x)\, y_p + b(x) = k'(x)\, e^{A(x)} + a(x) \cdot \underbrace{k(x) \cdot e^{A(x)}}_{y_p}.$$

$$k'(x) \cdot e^{A(x)} = b(x).$$

$$\Leftrightarrow \quad k'(x) = e^{-A(x)} \cdot b(x).$$

$$\Leftrightarrow \quad k(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)} \cdot dx.$$

$$y_p = \left(\int b(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot dx\right) \cdot e^{A(x)}.$$

la solution générale: $y = y_p + y_H$

$$y = \left(\int b(x)\, e^{-A(x)} \cdot dx\right) e^{A(x)} + k \cdot e^{A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exp: $\quad y' + y = e^x + 1.$

i) S.E.H: $\quad y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx.$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x + k.$$

$$\Rightarrow \boxed{y_H = k \cdot e^{-x}} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

ii) solution particulière :

$$y_p = k(x) \cdot e^{-x}$$

$$y_p' = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$$

$$y_p' + y_p = e^x + 1$$

$$e^x \left(k'(x) \cdot e^{-x} - \cancel{k(x) \cdot e^{-x}} + \cancel{k(x)} e^{-x} = e^x + 1 \right)$$

$$k'(x) = e^{2x} + e^x$$

$$k(x) = \int \left(e^{2x} + e^x\right) dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + e^x + c$$

$$y_p = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + c\right) \cdot e^{-x} = \frac{1}{2} e^x + 1 \qquad (c=0)$$

iii) sol. gen :

$$y = y_p + y_H = \left(\frac{1}{2} e^x + 1\right) + k \cdot e^{-x} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Theorème de Cauchy – Leipschitz :

$y' = a(x) y + b(x)$. E.D.L. du 1er ordre.

$a, b : I \longmapsto \mathbb{R}$. Continues sur un intervalle I.

alors, pour tout $x_0 \in I$ et pr tt $y_0 \in \mathbb{R}$: il existe une et une seule solution y t.q :

$$\| \, y(x_0) = y_0 . \, \|$$

$$\| \, y(1) = 2 : \|$$

Exp :

$$y(1) = \left(\frac{1}{2} \cdot e^1 + 1\right) + k \cdot e^{-1} = 2 .$$

$$k = e - \frac{e^2}{2}$$

$$\| \, y(x) = \left(\frac{1}{2} e^x + 1\right) + \left(e - \frac{e^2}{2}\right) \cdot e^{-x} \, \|$$

3. E.D.L. Second ordre à coéficient constants.

3.1. $ay'' + by' + cy = g(x).$ (E)

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

Théorème : l'ensemble des sol de (E_0) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2

3.2. Eqtion homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

on cherche des solutions de ce type : $y(x) = e^{rx}$.

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

$$ar^2 + br + c = 0 : \quad (E.C)$$

i) $\Delta > 0$: (r_1, r_2) $\quad y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$: où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ii) $\Delta = 0$ (r_0) $\quad y(x) = (\lambda + \mu x).e^{r_0 x}$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

iii) $\Delta < 0$:
$r_1 = \alpha + i\beta$.
$r_2 = \alpha - i\beta$.

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda e^{(\alpha+i\beta)x} + \mu.e^{(\alpha - i\beta)x}. \\ &= e^{\alpha x}\left(\lambda e^{+i\beta x} + \mu.e^{-i\beta x}\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\lambda \cos(\beta x) + \mu.\sin(\beta x)\right) \end{aligned}$$

Exp : ① $y'' - y' - 2y = 0.$

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

$\Delta = 1 + 4(2) = 9 > 0$: $r_1 = -1$, $r_2 = 2$.

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}. \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

② $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$(\Delta = 0)$ $r_0 = 2$

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{2x}. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

③ $y'' - 2y' + 5y = 0$

$$\Delta = 4 - 4.5 = -16 = (4i)^2$$

$r_1 = 1 + 2i$

$r_2 = 1 - 2i$

$$y(x) = e^{1x}. \left(\mu. \cos(2x) + \lambda \sin(2x)\right) \quad (\mu, \lambda \in \mathbb{R})$$

3.3 Eq. avec second membre :

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

la solution générale : $\Rightarrow y_G = \tilde{y}_p + \tilde{\tilde{y}}_{SSM}$

3.4. recherche d'une solution particulière :

$e^{\alpha x} P(x)$. $\alpha \in \mathbb{R}$ $P(x) \in \mathbb{R}[X]$.

$y_0 = e^{\alpha x} x^m . Q(x)$. $(\deg Q(x) = \deg P(x))$

$y_0 = e^{\alpha x}. Q(x)$ $\{m = 0\}$.
si α n'est pas racine de l'E.C.

$m = 1$
$y_0 = e^{\alpha x}.x.Q(x)$
si α est une racine simple de l'E.C

$m = 2$
$y_0 = e^{\alpha x}.x^2.Q(x)$
si α est racine double de l'E.C.

$$g(x) = e^{\alpha x}. \left(P_1.\cos(\beta x) + P_2. \sin(\beta x)\right)$$

$y_0 = e^{\alpha x} \cdot \left(\varphi_1(x) \cdot \cos(\beta x) + \varphi_2 \sin(\beta x) \right)$

si $(\alpha + i\beta)$ n'est pas racine de l'E.C.

$y_0 = e^{\alpha x} \cdot x \left(\varphi_1 \cos(\beta x) + \varphi_2 \sin(\beta x) \right)$

si $\alpha + i\beta$ racine de l'E.C.

φ_1 et φ_2 sont deux polynôme de degré $n = \max(P_1, P_2)$.

(E_0) : $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r-2)(r-3) = 0$

$S = \{ \lambda e^{2x} + \mu \cdot e^{3x} \}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

② $y'' - 5y' + 6y = 4x e^{x} = g(x) = e^{\alpha x} \cdot P(x)$ $\quad P(x) = 4x,\ \alpha = 1$.

$\underline{\underline{\alpha = 1}}$. $y_p(x) = (ax + b) \cdot e^{x} \leadsto y'_p = a \cdot e^{x} + (ax+b)e^{x} = (ax + a + b)e^{x}$

$\leadsto y''_p = a \cdot e^{x} + a \cdot e^{x} + (ax+b)e^{x}$

$y''_p - 5y'_p + 6y_p = 4x e^{x}$

$(ax + 2a + b)\cancel{e^{x}} - 5 \cdot (ax + a + b)\cancel{e^{x}} + 6(ax + b)\cancel{e^{x}} = 4x \cdot \cancel{e^{x}}$

$\Leftrightarrow (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b = 4x$.

$\begin{cases} 2a = 4 \\ -3a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

$y_p(x) = (2x + 3)e^{x}$.

iii) $\{ (2x+3)e^{x} + \lambda e^{2x} + \mu \cdot e^{3x} ; (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \}$.

Méthode de la variation de la constante:

$\{y_1, y_2\}$ est base des solution de (E_0), on cherche une sol particulière sous la forme $\overline{y_0 = \underline{\underline{\lambda}}\, y_1 + \underline{\mu}\, y_2}$ λ, μ : fonctions qui vérifient :

$$(S) : \begin{cases} \lambda' . y_1 + \mu' . y_2 = 0. \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

$\underline{y_0'}$, y_0'' $\rightarrow$ $a y_0'' + b y_0' + c y_0 = g(x)$

Exp. $1 . y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$ $\| x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\|$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda \overset{y_1}{\underset{\sim}{\cos(x)}} + \mu . \overset{y_2}{\underset{\sim}{\sin(x)}}$$

$$y_p = \lambda(x) . \cos(x) + \mu(x) . \sin(x).$$

$$\begin{cases} \lambda' . y_1 + \mu' . y_2 = 0. \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{matrix} \begin{cases} \underline{\lambda' \cos(x)} + \underline{\underline{\mu'}} . \sin(x) = 0. \\ -\lambda' . \sin(x) + \mu' . \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases} \quad (a = 1)$$

$$\begin{cases} \lambda' . \cos(x) \sin(x) + \mu' . \sin^2(x) = 0. & (1) \\ -\lambda' . \sin(x) . \cos(x) + \mu' . \cos^2(x) = 1. & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\| \mu' = 1 \|$ $\Rightarrow \mu(x) = x.$

$$\lambda' \cos(x) + \sin(x) = 0.$$

$$\lambda' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow \lambda(x) = \ln(\cos(x)).$$

$$y_0(x) = x . \sin(x) + \ln(\cos(x)) . \cos(x)$$

$$y_a = x \sin(x) + \ln(\cos(x)) \cos(x) + \lambda \cos(x) + \mu . \sin(x) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$