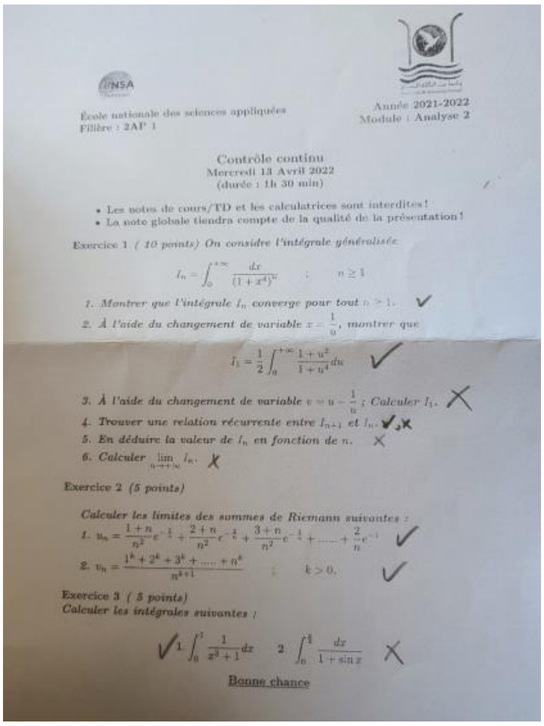
Séance 6 : intégrales généralisés

samedi 16 avril 2022 21:30



École nationale des sciences appliquées
Filière : 2AP 1

Année 2021-2022
Module : Analyse 2

Contrôle continu
Mercredi 13 Avril 2022
(durée : 1h 30 min)

- Les notes de cours/TD et les calculatrices sont interdites !
- La note globale tiendra compte de la qualité de la présentation !

Exercice 1 (10 points) On considre l'intégrale généralisée

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n} \quad ; \quad n \geq 1$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \geq 1$. ✓
2. À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du \quad ✓$$

3. À l'aide du changement de variable $v = u - \frac{1}{u}$; Calculer I_1. ✗
4. Trouver une relation récurrente entre I_{n+1} et I_n. ✓,✗
5. En déduire la valeur de I_n en fonction de n. ✗
6. Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$. ✗

Exercice 2 (5 points)

Calculer les limites des sommes de Riemann suivantes :

1. $u_n = \frac{1+n}{n^2}e^{-\frac{1}{n}} + \frac{2+n}{n^2}e^{-\frac{2}{n}} + \frac{3+n}{n^2}e^{-\frac{3}{n}} + \dots + \frac{2}{n}e^{-1}$ ✓
2. $v_n = \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$; $k > 0$. ✓

Exercice 3 (5 points)
Calculer les intégrales suivantes :

✓ 1. $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ ✗

Bonne chance

1. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$ $n \geqslant 1$

* points incertains : $+\infty$.

$x \mapsto \frac{1}{(1+x^4)^n}$: continue sur $[0,+\infty[$.

$\frac{1}{(1+x^4)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4n}}$ $\left(1+x^4 \underset{+\infty}{\sim} x^4\right)$

or $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}}$ CV car : $4n > 1$ $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$n \geqslant 1 \to 4n \geqslant 4 > 1$

d'où : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$ CV.

2. $x = \frac{1}{u}$

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

$x = \frac{1}{u} \to dx = -\frac{du}{u^2}$ $\begin{cases} x = 0 \to u \to +\infty \\ x \to +\infty \to u \to 0 \end{cases}$

$I_1 = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\frac{du}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}}$

$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+\frac{1}{u^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du$

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}}_{I_1}$

$2I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du.$

$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1} du$

3. $v = u - \frac{1}{u}.$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,du.$$

$$dv = du + \frac{du}{u^2} = \left(1+\frac{1}{u^2}\right) du.$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{\left(\frac{1}{u^2}+u^2\right)}\,du.$$

$$v^2 = \left(u-\frac{1}{u}\right)^2 = u^2 - 2\,u.\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$v^2 = u^2 + \frac{1}{u^2} - 2$$

$$v^2 + 2 = u^2 + \frac{1}{u^2}$$

$$\Bigg\| \; I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2+2}. \; \Bigg\|$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,dx = 2.\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad f : \text{paire}.$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ impaire}.$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{v^2+2} = \frac{1}{2}.\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

4. $\underline{\underline{I_{n+1}}}$ et $\underline{\underline{I_n}}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^{n+1}} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+x^4).(1+x^4)^n} - \frac{1+x^4}{(1+x^4)^n.(1+x^4)}\right) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{-x^4}{(1+x^4)^{n+1}}\,dx.$$

$$\begin{cases} u = x & (u' = 1) \\ v' = \dfrac{x^3}{(1+x^4)^{n+1}} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{(x^4+1)'}{(1+x^4)^{n+1}} = \dfrac{1}{4}.(x^4+1)'.(1+x^4)^{-n-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow v = \frac{1}{4}.\frac{(1+x^4)^{-n\cancel{-1}\cancel{+1}}}{-n\cancel{-1+1}} = -\frac{1}{4n}\,\frac{1}{(1+x^4)^n}$$

$$I_{n+1} - I_n = \left[-\frac{1}{4n}.x.\frac{1}{(1+x^4)^n}\right]_0^{+\infty}$$

$$+ \frac{1}{4n}\int \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{4n}\,I_n.$$

$$I_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{4n}\right) I_n = 0.$$

$$\| I_{n+1} = \frac{4n+1}{4n} I_n . \|$$

$$u_n = \sum \frac{k+n}{n^2} e^{-k/n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{k+n}{n} e^{-k/n} \qquad \left(x_k = \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum \left(\frac{k}{n} + 1\right) e^{-k/n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum (x_k + 1) e^{-x_k} . \xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 (x+1) e^{-x} dx$$

<u>Ex 3 :</u> $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$

$$x^3+1 = (x - (-1)) \cdot (x^2 + \underline{b}x + \underline{c})$$

$$\bullet \ x^3+1 = (x+1)(x^2+bx+c)$$

$$= x^3 + bx^2 + cx + x^2 + bx + c$$

$$= x^3 + \underbrace{(b+1)}\, x^2 + (c+b)\, x + c$$

$$b+1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$b+c = 0 \Rightarrow c = -b = 1$$

$$\| x^3+1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$$
$$\Delta < 0$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$(x+1) F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{1}{x^2-x+1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3} = a$$

$$\bullet \lim_{+\infty} x . F(x) = 0 = a + b . \Rightarrow b = -1/3 .$$

$$\circ \ F(0) = \frac{1}{1.1} = 1 = \frac{a}{1} + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1 - a = 1 - 1/3$$
$$\boxed{c = 2/3}$$

$$\bullet \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} . \ln|x+1| + I .$$

$$\bullet \quad I = -\frac{1}{3} . \int \frac{x - 1 - 1}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} . \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - x+1)'}{x^2-x+1} dx$$

$$- \int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$= -\frac{1}{6} \cdot \ln|x^2 - x + 1| - J.$

- $J = \int \frac{dx}{\underbrace{x^2 - (\frac{1}{2}) 2x + 1}_{+\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ $\quad 1 - \frac{1}{4}$

$= \int \frac{dx}{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{(x - 1/2)^2}{\frac{3}{4}} + 1 \right)}$

* $\int \frac{dx}{x - a}$ $\quad \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\quad \frac{t}{\int^n}$

$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)}$ $\quad \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$

$= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x - 1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 + 1}$

$t = \frac{x - 1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x - 1/2) \rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot dx.$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dt.$

$= \frac{4}{3} \cdot \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Arctg}(t)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x - 1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \Big|_0^1$

1. points incertains : 0

- la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$: est continue sur $]0,1]$. on a un problème en 0.

- $\ln(1+t) > 0$ qd $t \in]0,1)$.
- $\frac{1}{t} > 0$ qt $t \in]0,1)$

$f(t)$ garde un signe constant.

<u>en $V(0)$</u> : $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t.$

$\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{0}{\sim} 1$

or : $\int_0^1 1 . dt = 1$ converge

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1. $J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt$
2. $J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2 \, dt$
3. $J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} (\ln x)^5} \, dx$
4. $J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}^2}{x} \, dx$

2. $J_2 = \int_0^1 (\ln(t))^2 . dt$

$t \mapsto (\ln(t))^2$: continue sur $]0,1]$. on a un problème en 0.

* critère de Riemann : $\alpha = 1/2 < 1$

$\lim_{0} t^{1/2} . \ln^2(t) = \lim \left(t^{1/4} . \ln(t) \right)^2$

* critère de Riemann : $\alpha = 1/2 < 1$

$$\lim_{t \to 0} t^{1/2} \cdot \ln^2(t) = \lim \left(t^{1/4} \cdot \ln(t)\right)^2$$

$$= 16 \cdot \lim \left(t^{1/4} \cdot \ln(t^{1/4})\right)^2 = 0$$

$$\left(\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0 \right)$$

J_2 : converge.

Corollaire

Critère de Riemann au voisinage de l'infini

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

1. S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente
2. S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

VOIR LA PREUVE

Corollaire

Critère de Riemann au voisinage d'un réel a

Soient a et b deux réels, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

1. S'il existe un réel $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.
2. S'il existe un réel $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente..

3. $J_3 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,\ln^5(x)}\,dx$

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}\ln^5(x)}$$

$t^{3/4} \cdot \dfrac{1}{x^{1/2}\ln^5(x)} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$: J_3 : diverge.

4. $J_4 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(x)}^2}{x}$ $\qquad 3/2 - 1 = \frac{1}{2}$

$\cancel{x} \cdot \dfrac{\sqrt{\ln(x)}^2}{x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$. (div).

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1. $J_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
2. $J_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
3. $J_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}}$
4. $J_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

1 : $J_5 =$

$\underline{\underline{V(+\infty)}}$ $\quad \dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^{1/2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{(x^4)^{1/2}} \underset{+\infty}{\sim} 1.$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} 1 \cdot dx$: diverge

$\displaystyle\int \frac{dt}{\;}$ CV

2. $J_6 = \displaystyle\int^1 \frac{dt}{\;}$ CV

$$\int \frac{dt}{\sqrt{tg(t)}} \quad CV$$

$$\sqrt{tg(t)} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{tg(t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \int_{0}^{\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{t}} : CV$$

$$t^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\ln(t)}{\sqrt{}} \underset{0}{\longrightarrow} 0 . \quad \boxed{CV}$$

$$2.\ J_6 = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad CV$$

$u = 1-t$; $t = 1-u$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-u^2+2u}} = \frac{1}{\sqrt{u(2-u)}} \underset{0}{\overset{u\to 0}{\sim}} \frac{1}{\sqrt{2u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^{1/2}}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{u^{1/2}} \quad CV \quad (\alpha = 1/2 \leq 1)$$

Exercice

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1. $J_9 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ CV
2. $J_{10} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^3 + \ln t} dt$ CV
3. $J_{11} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$ $= \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} dt$
4. $J_{12} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$

$$\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = \sin(u) \qquad u = 1/t^2$$

$$\sin(u) \underset{0}{\sim} u = \frac{1}{t^2}$$

$$\underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}}_{CV} \qquad (\alpha = 2) > 1 .$$

$\underline{\underline{V(+\infty)}}$

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \quad (\beta = \tfrac{3}{2} > 1) \quad CV$$

$$C \quad \frac{\operatorname{Arctg}(t)}{t^3 + \ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^3 + \ln(t)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^3 \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t^3}}_{\approx 0}\right)}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^3}$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \quad \alpha = 3 > 1 \quad CV$$

$\underline{\underline{V(0)}}$

$$\frac{\sin(t)}{t^{3/2}} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t^{1/2}} \quad (\alpha = 1/2) \leq 1 \quad CV .$$

$$J_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$$

• $\underline{\underline{\alpha > 0}}$.

$\underline{\underline{V(+\infty)}}$:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}}$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}} \quad CV \quad \text{si} \quad 2-\alpha > 1 \Rightarrow 2-1 > \alpha$$

$$\Rightarrow 1 > \alpha$$

$\Rightarrow \boxed{\alpha < 1}$

$$\boxed{0 < \alpha < 1}$$

- $\alpha \leq 0$: $+\infty$ et 0.

en $+\infty$: $\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}} \rightarrow$ cv $\boxed{\alpha < 1}$

en 0 : $\dfrac{t^\alpha}{(1+t^2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{1} = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$

$\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{(-\alpha)}}$ cv ssi : $-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > -1$ $\qquad -1 < \alpha < 0$

J_2 cv ssi : $\boxed{-1 < \alpha < 1}$

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

135

1. $J_{13} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\, dx$
2. $J_{14} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}$
3. $J_{15} = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
4. $J_{16} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

$$\int \frac{f_t\, dt}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}$$

$(\Delta < 0)$

$$\boxed{t = \frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad , \quad S_0 = 0$$

a) Calculer I_0

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ $\quad I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ et $\quad I_n = (-1)^n (I_0 + S_n)$

c) Montrer que si $n \geq 1$ on a : $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n+1)}$.

d) déduire de ce qui précède la limite de la suite (S_n)

On considère l'intégrale $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$
2) Calculer I_0 puis en déduire la valeur de I_n en fonction de **n**
3) En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez une autre expression de I_n.

Que peut-on en conclure ?

On considère l'intégrale $\quad I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!}\,dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer I_1
2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} $(n \geq 2)$
3) Calculer I_n en fonction de n
4) Déterminer, pour n fixé, la limite de $I_n(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$
5) On pose $J_n = I_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!}\,dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n!}$

6) On pose $\quad U_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. Montrer, en utilisant le calcul de I_n que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \qquad U_n \leq e \leq U_n + \frac{1}{n!}.$$

7) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\right| \leqslant \frac{1}{x\ln(x)}$$

$\frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

cherchons $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$:

<u>critère de Riemann:</u>

$$x^{-1} \cdot \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{1}{x^2\ln(x)} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

$$\alpha = -1 \quad \text{et} \quad x^{-1} \cdot f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{x}\ln(x)}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

$$\frac{1}{x\ln(x)} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\sim$