Séance 11 : révision ENSAJ

dimanche 12 juin 2022 10:39

Montrer que les suites ci-dessous sont convergentes et calculer leurs limites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

$$x_k = \frac{k}{n}$$

$$* \; U_n = \sum_{1}^{n} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} \frac{1+x_k}{1+x_k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{}$$

f continue $\Rightarrow$ f Ri intégrable.

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \text{Arctg}$$

$$* \; v_n = \frac{1}{n} \cdot \sum x_k \cdot \sin(x_k \cdot \pi) \xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 x \sin(x\pi)\, dx$$

fonction définies comme intégrales :

Type I : $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$: $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

Type II : $F(x) = \int_I f(x,t) \cdot \underline{\underline{dt}}$; $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty}$

$$\int_0^1 \underline{\underline{f(x)}}\, dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$$

$$(x)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big(\ln|x^2+1|\Big)_0^1$$

(I P P).

$$. t^{x-1} . e^{-t}\, dt$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs dérivées :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt \qquad g(x) = \int_0^x x f(t)dt \qquad g(x) = \int_0^x f(t+x)dt$$

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. continue.

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction primitive de f : $F'(x)$

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt = \int_{2x}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{x^2} f(t)\,dt$$

$$= -\int_{c}^{2x} f(t)\,dt + \int_{c}^{x^2} f(t)\,dt$$

$$g(x) = F(x^2) - F(2x).$$

$x \longmapsto x^2$: C^1 sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto 2x$: C^1 sur $\mathbb{R}$. $\longrightarrow g(x)$: est

$x \mapsto F(x)$: C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = (F(x^2))' - (F(2x))'$$

$$(x^2)' F'(x^2) \qquad (2x)' . F'(2x$$

2. Intégrales fonctions des bornes.

Rappelons le théorème de Newton-Leibniz :

Théorème : Soient I un intervalle de **R**, $f : I \to \mathbf{R}$ ou **C** une fonction continue, c un point quelconque de I. La fonction $\boxed{F(x) = \int_c^x f(t).dt}$ est une primitive de f, en ce sens que $\forall x \in I \;\; F'(x) = f(x)$.

Remarque : Si f est seulement continue par morceaux sur I, la fonction F est alors

a) continue sur I,
b) dérivable en tout point x où f est continue, et alors $\boxed{F'(x) = f(x).}$
c) dérivable à droite et à gauche en tout point de I, et alors

$F'_g(x) = f(x - 0)$ (limite à gauche) $F'_g(x) = f(x - 0)$ (limite à gauche)

Conséquence : Soit I un intervalle de **R**, $f : I \to \mathbf{R}$ ou **C** une fonction continue par morceaux, α et β deux fonctions continues $X \to I$, où X est un espace métrique. La fonction $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t).dt$ est définie dans X et continue, comme composée de fonctions continues, puisque l'on peut écrire

$$\boxed{F(x) = \Phi(\beta(x)) - \Phi(\alpha(x))}\,, \text{ où } \Phi(y) = \int_c^y f(t).dt\,.$$

Si f est continue, et α et β sont dérivables : $X \to I$ (X et I intervalles de **R**), alors F est dérivable comme composée, et $(\forall x)\;\; F'(x) = \beta'(x).f(\beta(x)) - \alpha'(x).f(\alpha(x))$.

$) = f(a).$

$$F(X) = \int_a^X f(t)\,dt$$

$= -F(2x) + F(x^c).$

dérivable. on R

$(f(g(x)))' = g'.f'(g(x)$

$n)$

$$= (x^2)' . F'(x^2) - (2x)' . F'(2x$$

$$\| \ g'(x) = 2x \ f(x^2) - 2 . f(2x) . 1$$

2) $$g(x) = x . \int_0^x f(t)\,dt = x . F(x)$$

$x \mapsto x$: C^1 on $\mathbb{R}$.

$x \mapsto F(x)$: C^1 on $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = (x F(x))' = F(x) + x F'(x$$

$$g'(x$$

$n)$ $\qquad F'(x) = f(x)$

$|$

$g(x)$ est dérivable.

$g \in C^1$

$x) = F(x) + x \cdot f(x)$.

$x) = \int_0^x f(t)\,dt + x\, f(x)$.

t^{α}

$t^{\alpha} f(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

1. Calculer $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$.
2. Montrer avec les règles de Riemann que $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ Converge.
3. Calculer $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$.

$u = \sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{l} u = \sqrt{t^2+1} \Rightarrow t^2 = u^2 - 1 \\ du = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt. \end{array} \right.$$

$u.du$

$* \dfrac{ax+b}{cx+d}$: $\boxed{t = \dfrac{ax+b}{cx+d}.}$

$) = \boxed{t \cdot dt.}$

$$\left(dU = \frac{\ldots}{2\sqrt{t^2+1}}\, dt = \frac{\ldots}{\sqrt{t^2+1}} \right.$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{t\, dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = \int_a^b \frac{\cancel{U}\, dU}{(U^2-1)\cancel{U}}$$

$$\int \frac{a}{U-1}\, dU + \int \frac{b}{U+1}\, dU = a\ln|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \left| \frac{U-1}{U+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1+1-1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \ln \right.$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+1} \right) - \right.$$

2.) $$t^2 f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \longrightarrow 1$$

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad : \text{ or } \int_{\varepsilon}^{+\infty}$$

$$= \int_a^b \frac{dv}{v^2-1}$$

$$v-1| + b\,|\ln|v+1||$$

$$\frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}+1}) .$$

$$\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$\frac{dt}{t^2} \quad CV.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par : Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$

b) En déduire que la fonction $x \longmapsto f(x) + (\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t)^2$ *est constante.*

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Théorème de dérivabilité des intégr
$\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times$
- pour tout $x \in J$, la fonctio
  intégrable sur I;
- f admet une dérivée partie
- pour tout $x \in J$, la fonctio
- pour tout $t \in I$, la fonction
- il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$ continu
  tout $x \in J$ et tout $t \in I$,

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)d$
$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

- **Classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramèt**
  fonction définie sur $J \times I$ à valeurs
  - f admet des dérivées parti
    définies sur $J \times I$ pour tou
  - pour tout $x \in J$ et tout $0 \leq$
    morceaux sur I et intégrab
  - pour tout $t \in I$, la fonction
  - il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$ continu
    tout $x \in J$ et tout $t \in I$,

  Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)d$
  tout $0 \leq j \leq k$,

  $F^{(j)}($

ales à paramètres : Soit I, J deux intervalles de
I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que
n $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I et

lle $\frac{\partial f}{\partial x}$ définie sur $J \times I$;
n $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I;
$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J;
e par morceaux et intégrable telle que, pour

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t).$$

t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x \in J$,

res : Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une
s dans $\mathbb{K}$ et $k \geq 1$. On suppose que
elles par rapport à la première variable $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$
ut $j \leq k$;
$j \leq k$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par
ble sur I;
$x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J;
ue par morceaux et intégrable telle que, pour

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq g(t).$$

dt est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et, pour tout $x \in J$ et

$$x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

On considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que F est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Théorème de continuité des intégrales à paramètres : Soit A une p
normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction
à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par m
- il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable
tout $x \in A$ et tout $t \in I$,

$$|f(x,t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

partie d'un espace
définie sur $A \times I$

;
morceaux sur I;
telle que, pour

$$\int_0^{*} \frac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)(1+e^{-x})} = \int_0^t \frac{e^x\,dx}{(1+e^x)(e^x+1)}$$

$$= \int_0^t \frac{(e^x+1)'}{(1+e^x)^2} =$$

$$= \qquad u = e^x+1$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{1+e^x} \right)^A$$

Exercice 1

Calculer les intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}dx$
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$

$$\left\{ e^{-\sqrt{x}} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow v = -\frac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

$$\int_\varepsilon^1 f(x)$$

$$\int^1 f(x)dx = \left(0 \quad \ln(\varepsilon) \right)$$

$$= \int \frac{e^{x}\,dx}{(1+e^{x})^{2}}$$

$$\int_{2}^{t} \frac{u'}{u^{2}} = \left(-\frac{1}{1+u}\right)_{2}^{A}$$

$\to u = 2$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{A\to+\infty} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\frac{1}{1+e^{A}}}$$

$$)' = \underbrace{-(\sqrt{x})'}\cdot \underbrace{e^{-\sqrt{x}}}.$$

$=$

$$dx = \left[-\frac{\ln(x)}{1+x}\right]_{\varepsilon}^{1} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x(1+x)}$$

Fraction

$$(\ln(x))' \quad \ldots \quad (\ln(1+x))'.$$

$$\int_{\varepsilon} f(x)\,dx = -\left(0 - \frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon}\right) + a$$

$$= \frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon} - a.\ln(\varepsilon) +$$

$$= \ln(\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - a\right) +$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + b\,x}{x(x+1)} =$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix}$$

$$= \ln(\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - 1\right) -$$

$$= \ln(\varepsilon)\left(\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \varepsilon}{1+\varepsilon}\right) -$$

$$= -\frac{\varepsilon \ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon} - \ln\Big($$

$$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} \qquad t = \sqrt{x}. \qquad dt =$$

$$a\left(\ln(x)\right)_{\varepsilon}^{1} + b\cdot\left(\ln(1+x)\right)_{\varepsilon}^{1}.$$

$$+\, b\left(\ln(2) - \ln(1+\varepsilon)\right)$$

$$b\ln\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

$$\cdot\ln\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\Big)$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2t}.$$

$$= 2t\,dt.$$

$$\frac{e^{-t}}{t+1} \cdot 2t\, dt = \int \frac{2t}{t+1} \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= \int \frac{2t+2-2}{t+1} e^{-t} =$$

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $F'(x)$.

c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

$I =$

$2t =$

$\cos^2(x) \leq |\cos(x)| \leq$

$= 2t\, dt.$

$= \int \ell \cdot e^{-t}$

$\underbrace{\int \frac{c}{t+1} e^{-t}}_{I}$

$) - I$

$) \quad I = \frac{1}{c}$

Δ

$\cos^2(x) \leq |\cos(x)| \leq$

$$\frac{|\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$* \int_{\pi}^{A} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right]_{\pi}^{A} + \frac{1}{2}\cdot\int^{A}$$

Exist!

$$\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

?? $\leftarrow$ div

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$\int f \cdot g \, dt \rightarrow$ CV.

$+ \quad \searrow$

borné décroissante

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right|$$

CV

i) |

i)

1

$$|\cos(x)| \geq \cos^2(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$$

CV

$+\infty$

$= 1$

$| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

CV $\leftarrow$ CV

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ CV}$$

$$\left|\int f\,dt\right| \leq \int |f|$$

$$|f| \leq M$$

$$\left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M \,.\, \checkmark$$

$$\left|\int_\pi^A \cos(t)\,dt\right| = \left|\left[\sin(t)\right]_\pi^A\right|.$$

$$= |\sin(A) - \sin(\pi)| \ldots$$

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \, dt$$

$$|\cos(x)| \geq \cos^2(x) = \frac{1+}{}$$

$$\int_{\pi}^{A} \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \, dx \geq \int_{\pi}^{A}$$

div $\longleftarrow$

$$\int \frac{1+\cos(2x)}{\sqrt{x}} = \int^{A} \frac{d}{}$$

$$= |\sin(A) - \sin(\pi)| \ldots$$

$$= |\sin(A)| \leq 1$$

$$\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1+\cos(2x)}{2\sqrt{x}}$$

div

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \int^{A} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{\cdots}{\sqrt{x}} = \int$$

$u = 2x \quad \rightarrow x =$

$$\int \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du$$

$$u^{2/3} \quad \frac{\cos(u)}{u^{1/2}} = u^{1/6} \cos$$

$$\frac{4}{(x)} - \frac{1}{(x)} = \frac{1}{6}$$

$\alpha > 1$

$$t \cdot e^{-t^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \qquad \int^{\alpha}$$

$\sqrt{x}$ U_n $\sqrt{n}$

$\frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{u}}{2}$

$(\frac{1}{u}) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

: $\alpha = 1/6 < 1$

$\lim\limits_{+\infty} U^{\alpha_1} \cdot f(t) = +\infty$

$\boxed{\text{div}}$

$= L > 1$

Soit G la fonction définie par

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition de G,

b) Calculer $G(0)$ et $G(x)$ pour $x \neq 0$.

c) Que peut-on déduire ?.

Corollaire

Critère de Riemann a

Soient a un réel strict

1. S'il existe un réel

2. S'il existe un réel

VOIR LA PREUVE

Corollaire

Critère de Riemann a

Soient a et b deux rée

1. S'il existe un réel

2. S'il existe un réel

$$\left| x\, h(x)\, e^{-x} \right| \leq$$

$C\checkmark$

$$\int u e^{-x}$$

$\ln$

$C\checkmark$

$x^2 \quad x \cdot e^{-x}$

u voisinage de l'infini

ement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

$\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente

$\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

u voisinage d'un réel a

ls, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

$\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to a^+} (t-a)^{\alpha} f(t) = 0$, alors $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

$\alpha \geq 1$ tel que $\lim\limits_{t \to a^+} (t-a)^{\alpha} f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente..

$x e^{-x}$

CV

$\longrightarrow 0$

$\ln(t)\, e^{-t}$

$$I_n = \int \sin^n(x)\, dx \qquad \int_{\varepsilon}^{1}$$

I_0, I_n

Intergal de wallis.

V(2):

V(1): $\quad 2 -$

1

$+\infty$

$\underset{0}{\sim} \ln(t)$

$\ln(t)\, dt$ (1)

$f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$\dfrac{1}{1-t}$ $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{1-t}$

Exercice 739 (Intégrale de Wallis) *On pose* $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$

1. *Montrer que* (W_n) *peut aussi s'écrire* $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)d$
2. *Montrer que la suite* (W_n) *converge. En donner sa limit*
3. *Trouver une relation de récurrence pour cette suite*
4. *Calculer* W_n *en fonction de* n
5. *Trouver un équivalent de* W_n

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

0

$(t)dt$

t

$e.$

$= 0$ b impair

$= 2\int_0^a f(t)\,dt$

$= \int_0^T f(t)\,dt.$

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^n}\,dx.$$

$\boxed{\Delta < 0}$

$x^2+x+1 = x^2 +$

$= (x +$

$= \frac{3}{4} \cdot$

$t = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$1 - 1/4 =$

$2 \times \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right)$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\int dt = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^n} =$$

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

$\underline{I_1}$:

$I_n.$

$$\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,dt}{\frac{3}{\cancel{4}}\left(t^2+1\right)^n} = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}$$

$$\frac{dt}{t^n+1}$$

I_{n+1} $\quad I_n.$

$$I_{n+1} = \int$$

$$I_{n+1} - I_n =$$

$$= \int$$

$$\frac{dt}{(t^2+1)^n\cdot(t^2+1)}.$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n(t^2+1)} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

$$\frac{1-(1+t^2)}{(t^2+1)^n(t^2+1)}$$

$$= -\int \frac{t(}{(t^2+}$$

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^n}$$

$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}$$

$$= \int \frac{t}{t^2+1} \cdot -$$

$$\frac{\quad}{\quad 1)^n (t^2+1)} \, dt$$

J_1

$J_n.$

$$\frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

1

$$= \left[\frac{t}{t^4+1} \cdot \left(\right. \right.$$

$$- \int$$

$$= \left(\quad \right) + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int$$

$$I_{4} = \qquad + \frac{1}{2} \cdot \int$$

ϑ

$- \quad -$ $\quad +$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\Bigg)$$

$$\left(\frac{t}{t^2+1}\right)' \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\right)$$

$$\int \frac{(t^2+1)-t(2t)}{(t^2+1)^2}\,\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,dt$$

$$\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}$$

$$-\frac{t^2}{\quad} \ldots + \frac{1}{\ } \int \frac{dt}{\ }$$

$I_{n+1} =$ $+ \frac{1}{2} \cdot)$

I_{n+1}

Exercice 1.

1) Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

2) Calculer J_1 puis montrer que si $n \geq 2$, on a J_{n+1}

3) En déduire J_n si $n \geq 2$.

$=$

$J_{n+1} =$

$J_n =$

$$- \frac{1}{(t^3+1)^{n+1}} + \frac{1}{2} \Big) \frac{a}{(t^3+1)^{n+1}}$$

$$\sim$$

$$\frac{1}{2} J_{n+1}$$

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n} \text{ converge.}$$

$$= \frac{3n-1}{3n} J_n.$$

$$\frac{n-1}{3n} J_n$$

$$\frac{3(n-1)-1}{} \quad J_{n-1}$$

$J_n =$

$\partial(n-1)$

$$\frac{\quad}{\quad} \times \text{—} \times \times (J)$$