Conforme avec le programme des FST et FS

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

# Mécanique Quantique 1

**Inscription ouverte : préparation aux examens :**

Les notions abordées dans ce document :

- Corps Noir, Catastrophe UV, Dualité onde-corpuscule
- Effet photo-électrique, Effet Comptons, Diffraction des électrons,
- Barrière de potentiel, puit de potentiel, Effet Tunnel, Potentiel Delta
- Formalisme mathématique
- Postulats de la mécanique quantique

# SÉRIE 4 :

## Exercice 1

On considère une particule de masse m se déplaçant sur l'axe Ox et soumise à l'action d'un potentiel extérieur représenté par la barrière de potentiel de largeur a et de hauteur V0 :

$$V(x) = 0 \qquad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a$$
$$V(x) = V_0 > 0 \qquad \text{pour } 0 < x < a$$

A) On s'intéresse aux états de la particule d'énergie $E > V_0$.
   1) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace définies par x $< 0, 0 < x <$ a et x $>$ a .
   2) Donner une identification des différentes composantes de la solution et éliminer les termes non physiques. En déduire la solution physique globale dans les 3 régions.
   3) Écrire les conditions de raccordement aux points $x = 0$ et $x = a$.
   4) Déterminer l'amplitude de l'onde réfléchie dans la région I et celle de l'onde transmise à l'extérieur de la barrière (région III) en fonction de l'amplitude de l'onde incidente. En déduire les expressions des coefficients de réflexion R et de transmission T ainsi que leur somme.

B) Considérons maintenant les états de la particule où l'énergie $\mathbf{E} < V_0$;
   1) En utilisant les résultats précédents, donner la solution physique globale dans les 3 régions.
   2) Écrire les conditions de raccordement aux points $x = 0$ et $x = a$.
   3) En utilisant les résultats de cas précédent en déduire, sans faire les calculs, les expressions des coefficients de réflexion R et de Transmission T et leur somme. Conclure.

## Exercice 2

Dans un problème à une dimension, on considère une particule de masse m se déplaçant dans le sens de croissance de $x$ et soumise à la marche de potentiel :

$$V(x) = -V_1 \quad \text{pour } x < x_0$$
$$V(x) = +V_2 \quad \text{pour } x > x_0$$

où $V_1$ et $V_2$ sont des énergies potentielles constantes et positives et $x_0$ est une valeur positive de la position de cette particule.

A) On se donne un état stationnaire de cette particule décrit par la fonction d'onde $\varphi(x)$ d'énergie propre $\varepsilon > V_2$
   1) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace définies par $x < x_0$ et $x > x_0$.
   2) En identifiant chacun des termes de la solution et en écrivant les conditions de raccordement au point x = $\mathrm{x}_0$, déterminer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.
   3) Calculer les coefficients de réflexion $r$ et de transmission $t$ ainsi que leur somme. Conclure.

B) On s'intéresse maintenant à un état stationnaire de cette particule d'énergie propre positive $E < V_2$ décrit par la fonction d'onde $\phi(x)$

1) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace.
2) En identifiant chacun des termes de la solution et en écrivant les conditions de raccordement au point $x = x_0$, calculer les différentes constantes d'intégration en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.
3) Calculer le coefficient de réflexion R et en déduire celui de transmission T. Conclure.

---

## Exercice 3

Dans un problème quantique à une dimension, on considère une particule de masse m se déplaçant dans le sens de croissance de $x$ et soumise à la marche de potentiel :

$$\mathrm{V(x)} = -\mathrm{V}_1 \text{ pour } \mathrm{x} < \mathrm{x}_0 \text{ et } \mathrm{V(x)} = +\mathrm{V}_2 \text{ pour } \mathrm{x} > \mathrm{x}_0$$

Où $V_1$ et $V_2$ sont des énergies potentielles constantes et $x_0$ est une valeur positive de la position de cette particule.

A) On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie propre $\mathrm{E_i} > \mathrm{V}_2$ décrit par la fonction d'onde $\varphi(x)$.

1) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace définies par $x < x_0$ et $x > x_0$.
2) En identifiant chacun des termes de la solution et en écrivant les conditions de continuité raccordement au point $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, évaluer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.
3) Calculer les coefficients de réflexion r et de transmission t ainsi que leur somme. Conclure.

B) On s'intéresse maintenant à un état stationnaire de cette particule d'énergie propre positive $\mathrm{E} < \mathrm{V}_2$ décrit par la fonction d'onde $\Phi(\mathrm{x})$.

1) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace.
2) Calculer les différentes constantes d'intégration en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.
3) Calculer le coefficient de réflexion R et en déduire celui de transmission T. Conclure.

---

## Exercice 4

On considère une particule de masse $m$ se déplaçant sur l'axe Ox sous l'action d'un potentiel extérieur représenté par le puits de largeur a et de profondeur $\mathrm{V}_0$ :

$$\mathrm{V(x)} = \mathrm{V}_0 \text{ pour } \mathrm{x} < 0 \text{ et } \mathrm{x} > \mathrm{a}; \quad \mathrm{V(x)} = 0 \text{ pour } 0 < x < a.$$

On s'intéresse aux mouvements de la particule d'énergies E strictement inférieures à $\mathrm{V}_0$.

1) Évaluer les valeurs classiques de la vitesse dans chacune des différentes régions de l'espace définies par $\mathrm{x} < 0, 0 < \mathrm{x} < \mathrm{a}$ et $\mathrm{x} > \mathrm{a}$. Conclure.
2) Écrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace définies ci-dessus.
3) Après avoir éliminé les composantes non-physiques de la solution, écrire les conditions de raccordement aux points de discontinuité du potentiel.

4) Montrer que la fonction d'onde stationnaire associée à cette particule peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_{\rm I}(\rm x) = A e^{qx}, \quad x < 0$$

$$\Phi_{\rm II}(\rm x) = A\left[\cos(kx) + \frac{q}{k}\sin(kx)\right], \quad 0 < x < a$$

$$\Phi_{\rm III}(\rm x) = A\frac{1 - i\frac{q}{k}}{1 + i\frac{q}{k}} e^{ika} \cdot e^{q(a-x)} = A\frac{1 + i\frac{q}{k}}{1 - i\frac{q}{k}} e^{-ika} \cdot e^{q(a-x)}, x > a$$

Où A est une constante d'intégration, q et k sont données par : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $q^2 = \frac{2\ m(V_0 - E)}{\hbar^2}$. Quelle est l'interprétation physique de k ?

5) En déduire l'équation de quantification de l'énergie sous la forme :

$$\mathrm{tg}(\mathrm{ka}) = \frac{2\frac{k}{q}}{\left(\frac{k}{q}\right)^2 - 1}$$

6) La résoudre dans le cas particulier où $q$ tend vers $+\infty$. Quelles sont dans ce cas les valeurs quantifiées $E_n$ de l'énergie ? Commenter le résultat.

---

## Exercice 5 — Modèle simplifié du noyau de deutérium

On se propose d'étudier les états stationnaires de fonction d'onde $\varphi(x)$ et d'énergie $E$ d'un noyau de deutérium constitué d'un proton de masse $m_p$ et d'un neutron de masse $m_n$. Soit $Ox$ l'axe passant par les deux nucléons. Du fait de l'interaction entre ces deux derniers, le problème revient à représenter le noyau de deutérium par sa masse réduite $m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$ évoluant dans le potentiel suivant:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -V_0 & \text{si} \quad 0 \leq x < a \\ 0 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

où $V_0$ et $a$ sont des constantes positives. Dans ce problème, on considérera les états liés d'énergie $E$ telle que $-V_0 < E < 0$ et on introduira les constantes suivantes:

$$k^2 = \frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2} \text{ et } q^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$$

1) Représenter graphiquement l'allure du potentiel $V(x)$.
2) a) Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace où le potentiel est constant.
   b) Résoudre ces équations et établir l'expression de $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace où le potentiel est constant.
   c) Écrire la continuité de $\varphi(x)$ au point $x = 0$. En déduire la forme finale de la fonction d'onde $\varphi(x)$.
3) a) Écrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première au point $x = a$.
   b) En déduire l'existence d'une condition de quantification de l'énergie.
   c) Remplacer cette condition par une relation entre $|\sin(ka)|$ et $\frac{k}{k_0}$ où $k_0$ est une constante donnée par $k_0 = \sqrt{k^2 + q^2}$.

   On donne :

$$1 + \cot g^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

4) Résoudre graphiquement l'équation obtenue et montrer que l'énergie des états liés du noyau est quantifiée.

5) Expérimentalement, on observe que le noyau de deutérium ne possède qu'un seul état lié. A quelle condition doit satisfaire la quantité $V_0a^2$ ?
6) Tracer l'allure de la courbe de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de cet état lié en fonction de $x$.

---

## Exercice 6 — Transmission par une barrière de potentiel - Effet tunnel

Soit une particule de masse $m$ et d'énergie $E$ provenant de la région des $x$ négatifs, arrivant sur une barrière de potentiel, de hauteur $V_0$, définie comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) Étudier le comportement d'une particule classique d'énergie $E$ arrivant sur cette barrière dans les deux cas où $E > V_0$ et $E < V_0$.
Nous étudierons par la suite une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger d'énergie $E$ telle que $0 < E < V_0$.
2) Écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace. En déduire l'expression de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chaque région. On posera :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} ; q = \frac{\sqrt{2m\left(V_0 - E\right)}}{\hbar}$$

3) Écrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points $x = 0$ et $x = a$ et établir le rapport des amplitudes de l'onde transmise et incidente.
4) Le courant de probabilité qui caractérise le flux de particules est défini, à 1 dimension, par :

$$\vec{j}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi^*(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x)\frac{d\varphi^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x$$

Établir les expressions des courants de probabilité incident $\vec{j}_i$ et transmis $\vec{j}_t$ par la barrière.
5) Déterminer le coefficient de transmission $T = \frac{\left|\vec{j}_t\right|}{\left|\vec{j}_i\right|}$ de la barrière défini par le rapport entre les courants transmis et incidents.

---

## Exercice 7 — États de diffusion d'une particule dans un puits carré

On considère un faisceau de particules de masse $m$ et d'énergie $E > 0$, émis par une source située vers $-\infty$, se déplaçant vers une région de l'espace à une dimension où règne le potentiel attractif suivant : où $V_0$ et $a$ sont des constantes positives. On posera dans tout le problème :

$$q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \quad k^2 = \frac{2m\left(E + V_0\right)}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

1) Donner l'expression de la fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ dans chaque région (I), (II) et (III).
2) a) Exprimer la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée aux points $\pm a$.
   b) Déduire le rapport des amplitudes de l'onde incidente et de l'onde transmise dans (III).
   c) Calculer les courants de probabilité incident $\vec{j}_i$ et transmis $\vec{j}_t$ par le puits carré.
   d) Monter que le facteur de transmission $T$, qui donne la probabilité pour que la particule arrivant de la région (I) avec l'énergie $(E > 0)$ traverse le puits, s'exprimer sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{1 + f(E)\sin^2 g(E)}$$

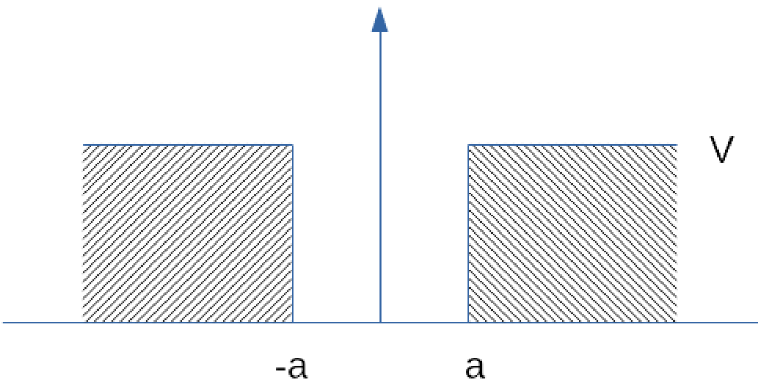
où $f(E)$ et $g(E)$ sont des fonctions de $E$ que l'on explicitera.

3) Le potentiel symétrique $V(x)$ représente de façon schématique le potentiel nucléaire ressenti par des neutrons arrivant sur un noyau lourd de diamètre $D = 2a = 20\text{fm}$.
Montrer que le noyau devient transparent aux neutrons ($T = 1$) pour certaines valeurs de leur énergie $E$. Calculer les trois premières valeurs de l'énergie telles que $T = 1$.
On donne : $V_0 = 45\text{MeV}$ et $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{32ma^2} = 51,1\text{MeV}$.

---

## Exercice 8

On considère un puits de potentiel fini, symétrique de largeur $2a$, entre $x = -a$ et $x = a$, avec un potentiel nul pour $|x| <= a$ et un potentiel $V$ au delà. On s'intéresse aux états localisés, tels que $E <= V$.

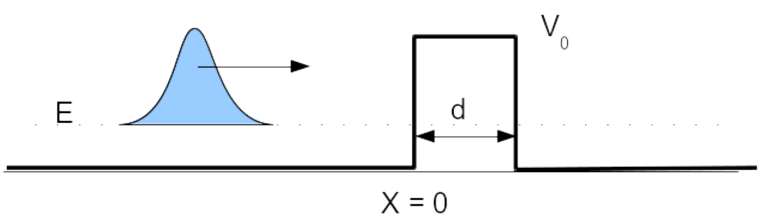



1) Écrire l'équation aux valeurs propres $\hat{\mathbf{H}}\psi(x) = E\psi(x)$. On pourra poser $k_0 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $k_V = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$
2) En utilisant les propriétés de symétrie du potentiel, et les conditions de raccordement, déterminer les familles de solutions possibles dans le puits et en dehors.
3) Quelles équations doivent relier $k_0$ et $k_V$ ?
4) Ces équations admettent-elles des solutions ? Montrer que lorsqu'elles existent, on peut les déterminer de façon graphique.
5) Comment évolue le nombre de solutions lorsque le potentiel $V$ augmente ? Lorsque la largeur du puits diminue?

---

## Exercice 9 — TD 8.1 - Barrière de Dirac

A la suite du devoir, on considère le cas limite d'une barrière de potentiel infiniment fine. En pratique, on fait tendre la largeur $d$ de la barrière vers 0 , et le potentiel $V_0$ vers l'infini, en maintenant le produit $d \times V_0$ constant. On rappelle qu'une fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger peut s'écrire, dans chaque région, comme une superposition d'ondes planes



progressives et régressives, sous la forme:

$$\psi(x) = \begin{cases} \alpha e^{ik_0x} + \beta e^{-ik_0x} \text{ pour } x < 0 \\ \gamma e^{ik_Vx} + \delta e^{-ik_Vx} \text{ pour } 0 < x < d \\ \epsilon e^{ik_0x} + \eta e^{-ik_0x} \text{ pour } x > d \end{cases}$$

avec $k_0 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $ik_v = \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$. On rappelle également que les $\alpha$ et $\beta$ s'écrivent sous la forme:

$$\alpha = \epsilon \left[\cosh \kappa d - i\frac{(k_0^2 - \kappa^2)}{2k_0\kappa} \sinh \kappa d\right] e^{ik_0d}$$

$\beta = \epsilon \left[i\frac{(k_0^2+\kappa^2)}{2k_0\kappa} \sinh \kappa d\right] e^{ik0d}$

1) En effectuant un développement limité en $d \times \kappa$ de $\alpha$ et $\beta$, déterminer, en utilisant les résultats précédents $\psi\,(x = 0^-)$, (juste avant la barrière) et $\psi\,(x = 0^+)$(juste après la barrière). La fonction d'onde est-elle continue?
2) Même question pour la dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial x}\,(x = 0^-)$et $\frac{\partial \psi}{\partial x}\,(x = 0^+)$.
3) Retrouver le résultat précédent en intégrant directement l'équation de Schrödinger de part et d'autre de la barrière.
4) On écrit maintenant la fonction d'onde sous la forme

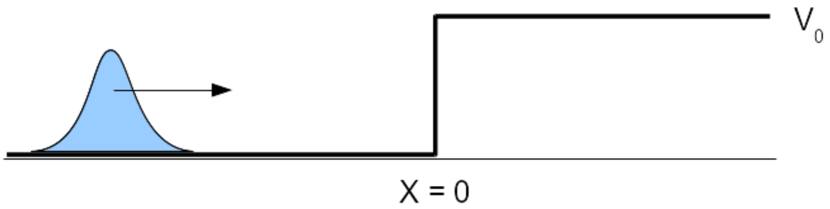
$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I e^{ik_0x} + \psi_R e^{-ik_0x} \text{ pour } x < 0 \\ \psi_T e^{ik_0x} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

Retrouver alors directement l'expression de la transmission d'une telle barrière de Dirac.

---

**Exercice 10** **TD 6.2 - Marche de Potentiel**

On considère une particule de masse $m$ en mouvement dans un potentiel $V(x) = 0$ pour $x < 0$ et $V(x) = V_0 > 0$ pour $x > 0$.




1) Déterminer les états propres du Hamiltonien pour $E >= V_0 > 0$. On rappelle que dans le cas d'un potentiel prenant des valeurs finies, la fonction d'onde et sa dérivée sont continues, même aux discontinuités du potentiel. On posera $k_0 = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $k_V = \sqrt{2m\,(E - V_0)}/\hbar$ et on supposera en outre que la particule vient de la gauche, ce qui permet d'annuler le terme associé à une onde plane se déplaçant de la droite vers la gauche dans la zone $x > 0$
2) Déterminer l'expression du courant de probabilité. Le décomposer en un courant incident $\vec{j}_I$, un courant réfléchi $\vec{j}_R$ (pour $x < 0$ ) et un courant transmis $\vec{j}_T$ (pour $x > 0$ ).
3) Déterminer les coefficients de réflexion $R = \frac{|\vec{j}_R|}{|\vec{j}_I|}$ et de transmission $T = \frac{|\vec{j}_T|}{|\vec{j}_I|}$. Montrer que l'on a bien $R + T = 1$.
4) Que se passe-t-il lorsque le potentiel $V_0$ est négatif ? Ce résultat a-t-il un équivalent en mécanique classique ? Étudier le cas limite $V_0 \to -\infty$. Comment interpréter ce résultat?
5) Étudier le cas $E < V_0$. Déterminer le courant de probabilité en $x > 0$, ainsi que les coefficients $R$ et $T$.

---