



Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisés
- Les séries numériques



SÉRIE 5 :

**Exercice 1**

ENSAM CASA

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 . Représenter graphiquement la boule unité fermée.

Exercice 2

ENSAM CASA

Soit A une partie de \mathbb{R}^2 ; A est dite rare si et seulement si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

- 1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) A rare \Leftrightarrow (ii) \bar{A} est rare \Leftrightarrow (iii) $\overset{\circ}{\mathbb{C}_{\mathbb{R}^2} A} = \mathbb{R}^2$
- 2) Montrer que si A et B sont rares alors $A \cup B$ est rare.

Exercice 3

ENSAM CASA

Montrer que \mathbb{Q}^2 est dense dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

Exercice 4

ENSAM CASA

Une partie C de \mathbb{R}^2 est dite convexe si pour tout x et y de C le segment $[x, y]$ est inclus dans C .
Montrer que $\overset{P}{C}$ et $\overset{C}{C}$ sont convexes.

Exercice 5

ENSAM CASA

Soit (u_n) une suite dans \mathbb{R}^2 . Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on note

$$U_p := \{u_n : n \geq p\}$$

- 1) Montrer que $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bar{U}_p$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .
- 2) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (u_n) bornée est une partie compacte de \mathbb{R}^2 .

Exercice 6

ENSAM CASA

A une partie connexe de \mathbb{R}^2 .

- 1) Montrer que toute partie B de \mathbb{R}^2 , telle que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, est connexe

2) En particulier \bar{A} est connexe.

Exercice 7

ENSAM CASA

- 1) Dans \mathbb{R} usuel, $\mathbb{Q} \cap [0; 1[$ est-il connexe?
 - 2) Dans \mathbb{R}^2 usuel, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ est-il connexe?
-