Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisés
- Les séries numériques

Série 3:

Exercice 1

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

1) $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$.
2) $V_n = \sqrt{n^2+n} - n$.
3) $V_n = \frac{n^3}{n!}$.
4) $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.
5) $U_n = \frac{n}{n^2-2}$.
6) $V_n = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
7) $U_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3$.
8) $V_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$.
9) $U_n = (-1)^n e^{-n}$.
10) $V_n = (-1)^n n$.

Exercice 2 — ENSATE

Étudier la nature et calculer la somme dans le cas de convergence des séries de termes généraux:

1) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2) $v_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$.
3) $w_n = \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.
4) $t_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 3

1) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{(n+1)!}$ et calculer sa somme.
2) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{\left((n+1)^2\right)}{(n(n+2))}\right)$ et déterminer sa somme.

Exercice 4 Nature de séries dépendant d'un paramètre via comparaison intégrale

1) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

2) Montrer que $\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq \sum^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)+1$, et déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice 5 — C FINAL ENSATE 2018

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+3}$$

Soit (w_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = n^2 u_n$.

1) La règle de d'Alembert permet-elle de conclure quant à la nature de $\sum u_n$?
2) Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$.
3) En déduire que la suite (w_n) est convergente.
4) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
5) Énoncer la règle de Duhamel. Retrouver le résultat précédent en utilisant cette règle.

Exercice 6 — C FINAL ENSATE 2018

Considérons la série de terme général u_n où

$$u_n = \frac{n^\beta}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

1) Étudier les cas $a > 1$ et $a = 1$ via la règle de d'Alembert.
2) Étudions a présent le cas $a < 1$.
   a) Montrer que $\sum \ln(1+a^n)$ converge.
   b) Montrer qu'il existe un réel k tel que $u_n \sim_\infty kn^\beta$.
   c) En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 7 — ENSAH 2019-2020

Choisir la bonne réponse.

Question 1

On considère une série réelle $\sum_{n\geq 0} u_n$.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors (u_n) converge vers 0
2) Si (u_n) converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
3) Si (u_n) converge vers 0 alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Question 2

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n < \sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
3) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Question 3

1) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$
2) converge si et seulement si $x \neq 1$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$
3) converge si et seulement si $|x| < 1$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

Question 4

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs, (a_n) est une suite positive bornée.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n a_n$ converge
2) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n a_n$ diverge
3) On ne peut rien dire

Exercice 2 (4 pts)

Répondez à chaque question par Vrai ou Faux Dans tout ce qui suit, $(u_n)_n$ désigne une suite de nombres réels.

1) Q 1: Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2) Q 2: Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} \frac{1+u_n}{2+u_n}$
3) Q 3: Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}(-1)^n u_n$ convergente
4) Q 4: Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum_{n=1} u_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}(-1)^n u_n$ convergente

---

Exercice 8

Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

Exercice 9

Étudier la convergence des séries de terme général :

1) $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$
2) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \alpha > 0$
3) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exercice 10

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \quad \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Exercice 11

Exercice 10 Montrer que les séries de termes généraux

$$u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

ne sont pas de même nature, bien que $u_n \sim v_n$.

Exercice 12 **CC 2 2013 (6 pts) Séries numériques : cas limite de la règle de d'Alembert.**

Soit, pour tout $n \geq 1$, la suite $u_n = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$.

1) (0.5 pt) Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2) (0.5pt) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geq1}$ est croissante.
3) (1 pt) En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
4) Pour tout $n \geq 2$, on considère la suite $v_n = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$.
5) (0.5 pt) Calculer la limite de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
6) (0.5 pt) Soit α un réel strictement positif. Montrer que $\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1-\frac{3}{2n+2}\right)$.
7) (1 pt) Montrer que pour n assez grand, on a $\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = 1 + \frac{2\alpha-3}{2n+2} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$.
8) * (1.5 pt) On suppose que $\alpha < \frac{3}{2}$. Montrer qu'à partir d'un n_0, on a pour $n > n_0$
$$0 \leq v_{n+1} \leq v_{n_0}\frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$
9) (0.5 pt) En déduire pour $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$, la convergence de la série de terme général v_n.

Exercice 13 **CONTRÔLE DE RATTRAPAGE 2016(10 pts)**

1) Déterminer la nature des séries numériques de termes générales :
   a) (2 pts) $u_n = \frac{e-\sin n}{n}, n \geq 1$.
   b) (2 pts) $u_n = \frac{n}{(-3)^n}, n \geq 0$.
   c) (2pts) $u_n = \frac{n+1}{-n+(-1)^n\sqrt{n}}, n \geq 1$.
2) a) (1 pt) Vérifier que pour tout $n \geq 1$ et pour tout réel x :
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$
   b) (3 pts) En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

?