Conforme avec le programme des FST et ENSA(M)

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisés
- Les séries numériques

Série 4 :

Exercice 1 — ENSAM CASA

Déterminer les limites suivantes. (Selon les cas, X désignera le couple (x, y) ou le triplet (x, y, z))

a) $\lim_{x\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

b) $\lim_{X\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

c) $\lim_{X\to(0,0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Exercice 2 — ENSAM CASA

Après avoir donné le domaine sur lequel il n'y a pas de problème de dérivabilité partielle, calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes.

a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

b) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$

d) $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

Exercice 3 — ENSAJ 2017 (5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f au point $(0, 0)$.
2) Calculer les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
3) Montrer que f est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur $h = (u, v)$.
4) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4 — ENSAM CASA

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en $(0, 0)$

2) Montrer que

$$\lim_{x\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

3) En déduire que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle en $(0,0)$ est nulle.

Exercice 5 — ENSAM CASA

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et par $f(0,0) = 0$. Montrer que f est partiellement dérivable par rapport à x et par rapport à y en $(0,0)$. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6 — ENSAM CASA

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ et étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$

Exercice 7 — ENSAM CASA

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$
4) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
5) f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 — ENSAJ 2019

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2) Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
3) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9 — ENSAM CASA

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+y)^2 - x^3 + x^4$.

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $(0,0)$, $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ sont les seuls points critiques de f.
3) Calculer la matrice hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4) Déterminer la nature du point critique $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.
5) Le cours permet-il de déterminer la nature du point critique $(0,0)$? Justifier votre réponse.
6) Calculer $g(x) = f(x, -x)$.
7) Étudier la fonction g au voisinage de 0 . En déduire la nature du point critique $(0,0)$.

Exercice 10 — ENSAJ 2017-2018

Exercice 1 (4.5 points)

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y.$$

1) Déterminer les points critiques de f.
2) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
3) Pour chaque point critique, écrire la matrice hessienne de f et déterminer sa nature.

Exercice 2 (4 points)

Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit $g :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par :

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On pose $h = f \circ g$.

1) Montrer que h est différentiable sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et exprimer $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$.
2) En déduire les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$ en fonction de r, θ, $\frac{\partial h}{\partial r}(g(r,\theta))$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(g(r,\theta))$.

Exercice 11 — ENSAM CASA

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x + 2y$.

1) Montrer que h admet un unique point critique que l'on déterminera.
2) Montrer que h admet un minimum local en ce point.
3) Montrer que ce minimum est global.

Exercice 12

On propose d'étudier la fonction $f(x,y) = y - 4x^2 + 3xy - y^2$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.
2) Montrer que f admet un unique point critique que l'on déterminera.
3) Calculer les dérivées secondes de f. En déduire le Hessien de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4) Préciser la nature du point critique. Justifier.

Exercice 13

Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1, 1)$. Calculer alors $\frac{dy}{dx}$ en ce point.

Exercice 14

Montrer que la relation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1$ définit y comme fonction de x sur un voisinage de $(0, 1)$. Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $x = 0$. Calculer ce développement limité à l'ordre 2 .