Conforme avec le programme des FST et ENSA(M)

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisés
- Les séries numériques

Série 1 :

Exercice 1

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes, en choisissant pour chacune d'elles un intervalle adapté au calcul :

1) $xy' + 2y = x^2 - 3$
2) $(1 + x^2)\, y' + xy = 2x^2 + 1$
3) $y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}$
4) $xy' - xy = e^x$
5) $xy' - 2y = \ln x$
6) $y' + \frac{6}{x+2} y = \frac{1}{(x+2)^2}$
7) $x\,(x^2 + 1)\, y' - (x^2 - 1)\, y = -2x$
8) $x(x - 1)y' - 2y = x - 1$
9) $xy' - (x + 1)y = -\,(x^2 + 1)\, e^x$
10) $y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

Exercice 2

Exercice. 1 Soit E la fonction en escalier nulle sur $\mathbb{R}^-$et égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver les solutions de l'équation différentielle, sur l'intervalle] - 1, 1[, suivante :

$$y'(x) + E(x)y(x) = 0.$$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2) $xy' - y = x^2 e^x$
3) $(x \ln(x))y' - y = \frac{-1}{x}(\ln(x) + 1)$
4) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$
5) $(1 - x)y' + y = \frac{x-1}{x}$
6) $y' + y = \frac{1}{e^x+1}$
7) $y' \sin(x) - y \cos(x) + 1 = 0$
8) $2xy' + y = x^n$

Exercice 4

Soit f une fonction de classe C^2 (c'est à dire deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est continue sur $\mathbb{R}$).

1) Montrer qu'il existe au plus une application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in IR, \quad g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt + f(x).$$

2) Résoudre l'équation dans le cas où $f(x) = \cos(x)$.

Exercice 5

(a) En utilisant les primitives des fonctions f et g, expliquer comment trouver des solutions d'une équation différentielle du type :

$$f(x) + g(y)y' = 0.$$

(b) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes : (i) $(1+x^2)\,y' = 1+y^2$. (ii) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$. Y a-t-il unicité des solutions au problème de Cauchy pour (ii) ?

Exercice 6

Déterminer la solution générale sur l'ensemble des nombres réels des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$
2) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^x + 8e^{-x}$
3) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\,e^x$
4) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$
5) $y'' + y = \cos^3 x$
6) $y'' - 2y' + 5y = \cosh x \cos 2x$
7) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
8) $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}\cos x$

Exercice 7

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
2) $y'' + y' = 3 + 2x$
3) $y" + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$
4) $y'' + 3y' + 2y = e^x$
5) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
6) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
7) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)\,e^{2x}$
8) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)\,e^x$
9) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$
10) $y\," -2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)\ -4e^x \sin(2x)$

Exercice 8

Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \text{ avec } \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

1) En posant $z(t)=y\left(e^{t}\right)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
2) Quelle est la forme de (E) sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ et $\mathbb{R}_{-}^{*}$?
3) Résoudre l'équation :
$$x^2y" - xy' + y = 0$$
4) En déduire des résultats précédents, toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ telles que :
$$\forall x>0, \quad f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 9

1) Soit l'équation différentielle suivante:
$$xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$$
En posant $z=xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
2) Soit l'équation différentielle suivante :
$$x^2+y^2-2xyy'=0$$
En posant $z=y^2$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
3) Intégrer l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :
$$(1+x)y''+(1+x)y'-2=0$$
On peut poser $y'=z$.

Exercice 10

On considère l' équation différentielle suivante : $|x|y'(x)+(x-1)y(x)=x^3$

1) Donner l'ensemble des solutions de l' équation précédente pour $x \in]0,+\infty[$.
2) Donner l'ensemble des solutions de ll' équation précédente pour $x \in]-\infty,0[$.

Exercice 11 — Équation de Bernoulli.

1) Montrer que l'équation de Bernoulli y' $+a(x)y=b(x)y^m$ avec $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, m \neq 1$ se ramène à une équation linéaire du premier ordre par le changement de variable $z=y^{1-m}$.
2) Résoudre les équations suivantes : a) $xy'+y=xy^3$ b) $y'=y\frac{\tan x}{3}+\frac{1}{3y^2}$

Exercice 12 — Équations différentielles d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''-6y'+9y=0$.
2) $y''-4y'+13y=0$.
3) $y''-y=1+x^2$.
4) $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$;

5) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$
6) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\, e^x + e^{3x}$
7) $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos x$
8) $y'' - 2y' + 5y = -4x e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin(2x)$

Exercice 13

Résoudre l'équation différentielle:

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$, où p et q sont des constantes réelles.