Conforme avec le programme des FST et ENSA(M)

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisés
- Les séries numériques

Série 1 :

Les intégrales de Riemann

Exercice 1

1)

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

2)

$$t_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

3)

$$v_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

4)

$$w_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\ldots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$$

5)

$$v_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}.$$

6)

$$S_n = \sum_{p=n}^{2n}\frac{1}{p}$$

7)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

8)

$$v_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$$

9)

$$w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

Exercice 2

⚠ Calculer $\int_0^1 x^2 \, dx$ et $\int_0^1 x^3 \, dx$ en utilisant des sommes de Riemman.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Déterminer sa limite.

Exercice 4

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 5

Calculer la limite de $u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 6

Déterminer la limite de $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 7

Déterminer la limite de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 8

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 9

⚠ Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt$.

1) Déterminer Df.
2) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.
3) Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Exercice 10

Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$$

déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Indication : il y a un 1 de trop!).

Exercice 11

Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1) Nature et limite de la suite $(S_n)_n$.
2) Nature et limite de la suite $(U_n)_n$. (On pourra comparer U_{2n} et S_n)

Exercice 12

Soit f continue sur $[0,1]$, déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx$.

Exercice 13

1) Montrer que pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$
2) Déterminer la limite de la suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 14

Déterminer $\lim_{n\to\infty}a_n\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ où $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$.

Exercice 15 (D'après Mines Douai 2009).

On définit f et φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f:P\longmapsto\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$ et $\varphi:P\longmapsto P(1)$.

1) Vérifier que $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ et que $\varphi\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}\right)$.
2) Montrer que $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\forall n\in\mathbb{N}^*,f^n(P)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.
3) En déduire que $\varphi\left(f^n(P)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 P(t)dt$.

Exercice 16

Déterminer la limite de $u_n=n^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1^12^23^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 17

On désire déterminer la limite de

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n^2+nk+2009}$$

1) S'agit-il d'une somme de Riemann?
2) Simplifier

$$\frac{1}{1+\frac{k}{n}}-\frac{2009}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}+\frac{2009}{n^2}\right)}$$

3) Conclure.

Exercice 18

Déterminer pour $x \neq 0, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2}$

rép : on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{1+x^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ est une somme de Riemann pour $f(t) = \frac{1}{1+x^2t^2}$. La somme converge vers $\int_0^1 f(t)dt = \frac{\arctan x}{x}$.

Exercice 19

Calculer la limite de $\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$

rép : c'est $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}$ qui est une somme de Riemann, converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+8x}} = \frac{1}{2}$

Exercice 20

Déterminer $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

Réponse : On va utiliser l'inégalité suivante, $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, inégalité qui peut s'établir à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. Notons Π_n le produit à étudier et $u_n = \ln(\Pi_n)$. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

mais $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ est une somme de Riemman qui converge vers $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ où $g(x) = x(1-x)$ est une somme de Riemman qui converge. Par encadrement, on en déduit que $(u_n)_n$ converge vers $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$. La valeur de cette intégrale est l'aire du demi disque de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) = e^{\frac{\pi}{8}}$$

Exercice 21

Écrire $\int_0^1 x^2 \, dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \cdots$, et $\int_0^1 x^3 \, dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \cdots$

Exercice 22

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{x}$, de pas $\frac{1}{n}$, sur le segment $[1, p]$. Sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est $\ln p$.

Exercice 23

Vérifier que $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$. En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\frac{4}{\mathrm{e}}$.

Exercice 24

Constater que S_n est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 25

Passer par une somme de Riemann de f sur $[0,1]$, de pas $\frac{1}{n}$. Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, puis passer à la limite quand $n \to +\infty$.

Calcul des intégrales et primitives

Exercice 26 — Extrait ENSAJ

⚠ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que f est nulle. (1.5 pts)

Exercice 27 — Extrait ENSAJ

⚠ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \neq 0$ et $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$. Montrer que : $\forall t \in [0,1], \quad f(t) = 1$. (1.5 pts)

Exercice 28 — Extrait ENSAJ

⚠ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$ ne dépend pas de $\alpha\cdot$ (1 pts)

Exercice 29

Calculer les primitives suivantes:

1) $$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

2) $$\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}dx$$

3) $$\int \sin^2 x dx$$

4) $$\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

5) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

6) $$\int \frac{dx}{\sin x}$$

7) $$\int \frac{dx}{5\cosh x + 3\sinh x + 4}$$

8) $$\int \frac{e^{Arc\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

9) $$\int \frac{(\ln|\ln|x\,||)^2}{x\ln|x|}dx$$

10)
$$\int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

11)
$$\int \frac{\sqrt{x^{10}+1}}{x}dx$$

12)
$$\int \frac{\tan x}{2+\tan^2 x}dx$$

13)
$$\int x^4 \ln|x| dx$$

14)
$$\int \left(x^3+1\right)e^{-x}dx$$

15)
$$\int (\operatorname{Arcsin} x)^2 dx$$

16)
$$\int \sinh x \sin x dx$$

17)
$$\int \sinh^2 x \sin^2 x dx$$

18)
$$\int \ln\left(x^2+4x+5\right)dx$$

19)
$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$$

20)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$$

21)
$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1-\cos x}}$$

Exercice 30

Calculer les primitives suivantes:

1)
$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$$

2)
$$\int \frac{1}{(1+x^3)^2}dx$$

3)

$$\int \frac{1}{x^4+4} dx$$

4)

$$\int \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^3} dx$$

5)

$$\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1} dx$$

6)

$$\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)} dx$$

Exercice 31

2.01. - Montrer que si f est paire $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
si f est impaire $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0.$

2.02. - Montrer que si f est périodique, de période T : Application :

$$\int_a^{a+\mathbf{T}} f(x)dx = \int_0^{\mathrm{T}} f(x)dx$$

$$\text{et } \int_0^{\cdot n\ \mathrm{T}} f(x)dx = n\int_0^{\mathrm{T}} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+n\ \mathrm{T}} \sin\omega x dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^{a+n\ \mathrm{T}} \cos\omega x dx = 0.$$

2.03. - Montrer au moyen d'un changement de variable que :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Application : Calculer $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x dx$ et $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$.

2.04. - Calculer au moyen d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^2+a^2}; \quad \mathbf{I} = \int x\sqrt{1+x^2}dx; \quad \mathrm{I} = \int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+5}}; \quad \mathbf{I} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad I = \int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$$

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)} \quad \left(\text{on posera } \frac{1}{x} = t\right).$$

Exercice 32

Calculer les primitives suivantes :

1)

$$\int \cos^5 x \sin^4 x dx$$

2)

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx$$

3)

$$\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

Les intégrales généralisés

Exercice 33

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1)
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1}$$

2)
$$I_2 = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$$

3)
$$I_3 = \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

4)
$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$$

5)
$$I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

6)
$$I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$$

Exercice 34

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1)
$$J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

2)
$$J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t$$

3)
$$J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5} \, \mathrm{d}x$$

4)
$$J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}^2}{x} dx$$

Correction de l'exercice 34 :

1)

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\ \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0 . Or, on a $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$, d'où $\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{0}{\sim} 1$.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0 , et ainsi l'intégrale J_1 converge.

2)

$$J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2\ \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto (\ln t)^2$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0 . Or, on a $\sqrt{t}(\ln t)^2 = \left(t^{1/4}\ln t\right)^2 = \left(4t^{1/4}\ln\left(t^{1/4}\right)\right)^2 \xrightarrow{t\to 0} 0$ d'où $(\ln t)^2 = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ étant intégrable en 0 , on en déduit que l'intégrale J_2 converge.

3)

$$J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5}\ \mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5}$ est continue sur $[2,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$. On a : $\frac{x^{1/4}}{(\ln x)^5} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$, donc $\frac{x^{3/4}}{\sqrt{x}(\ln x)^5} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$, donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale J_3 diverge.

4)

$$J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}^2}{x} dx$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}^2}{x}$ est continue sur $[2,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$. Or, on sait que $\frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ donc $\sqrt{\ln x}\frac{x}{\infty}o(\sqrt{x})$.
Ainsi,

$$\frac{\sqrt{\ln x}^2}{x}\ \frac{x}{\bar{\infty}}\ \circ\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

, et comme $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_4 converge,

---

Exercice 35

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1)

$$J_5 = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

2)

$$J_6 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

3)

$$J_7=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}}$$

4)

$$J_8=\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Correction de l'exercice 35 :

1)

$$J_5=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

La fonction $x\mapsto\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.
On a : et comme $x\mapsto 1$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_5 ne converge pas.

2)

$$J_6=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1$. On a un problème en 1 . on a:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{u=1-t}=\frac{1}{\sqrt{-u^2+2u}}=\frac{1}{\sqrt{u(2-u)}}\overset{u}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2u}}>0,$$

et comme $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{2u}}$ est intégrable au voisinage de 0 on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_6 converge.

3)

$$J_7=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}}$$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{\tan t}}$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{4}]$. On a un problème en 0 . on a:

$$\frac{1}{\sqrt{\tan t}}\overset{t}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}>0$$

et comme $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable au voisinage de 0 , on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_7 converge.

4)

$$J_8=\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0 . On a:

$$t^{3/4}\times\frac{\ln t}{\sqrt{t}}=t^{1/4}\times\ln(t)\xrightarrow{t\to 0}0.$$

Donc $\frac{\ln t}{\sqrt{t}}=o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$ et comme $t\mapsto\frac{1}{t^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 , on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_8 converge.

Exercice 36

⚠ Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur):

1)
$$J_9 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

2)
$$J_{10} = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^3 + \ln t} \mathrm{d}t$$

3)
$$J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$$

4)
$$J_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

Correction de l'exercice 36 :

1)
$$J_9 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a : $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{\infty}{\overset{t}{t^2}} \frac{1}{t^2} > 0$, et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_9 converge.

2)
$$J_{10} = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^3 + \ln t} \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \frac{\arctan t}{t^3+\ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a:
$$\frac{\arctan t}{t^3 + \ln t} \underset{+\infty}{\overset{t}{2}} \frac{\pi}{2t^3} > 0$$

, et comme $t \mapsto \frac{1}{2t^3}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale J_{10} converge.

3)
$$J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a un problème en 0 et en $+\infty$.

On a :
$$\left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

et comme $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que $t \mapsto \frac{\sin t}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'autre part, on a

$$\frac{\sin t}{t^{3/2}} \underset{0}{t} \; \underset{0}{t} \; \underset{t^{3/2}}{\overset{t}{\sim}} \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$$

et comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 , on en déduit par un théorème de comparaison que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de 0 .
Finalement, on en conclut que l'intégrale J_{11} converge.

4)

$$J_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Il faut étudier la convergence en fonction de la valeur du paramètre α.
Tout d'abord, on a: $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est continue sur $\begin{cases} [0, +\infty[& \text{si } \alpha \geq 0 \\ ]0, +\infty[& \text{sinon} \end{cases}$ Si $\alpha \geq 0$. On a un problème en $+\infty$.
Or on a:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\overset{t}{+\infty}} t^{\alpha-2} > 0$$

et $t \mapsto t^{\alpha-2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ est intégrable si et seulement si $2 - \alpha > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$.
On en déduit donc que si $0 \leq \alpha < 1$, alors l'intégrale J_{12} converge.
Si $\alpha \leq 0$. On a un problème en $+\infty$ et en 0 .
En $+\infty$, on a la même chose que précédemment, à savoir convergence si et seulement si $\alpha < 1$ ce qui est le cas.
En 0 , on a:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \overset{t}{\sim} t^\alpha > 0$$

et cette fonction est intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.
On en déduit donc que si $-1 < \alpha < 0$, alors l'intégrale J_{12} converge.
Finalement, on en conclut que l'intégrale J_{12} converge si et seulement si $-1 < \alpha < 1$.

Exercice 37

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1)

$$J_{13} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} \mathrm{d}x$$

2)

$$J_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (1+t^\beta)}$$

3)

$$J_{15} = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

4)

$$J_{16}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice 37 :

1)

$$J_{13}=\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta}\mathrm{d}x$$

La fonction: $x\mapsto\frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $]0,1]$, il y a donc un problème en 0 . On cherche un équivalent de cette fonction en 0 , en fonction des paramètres :
Si $\alpha>0$ $\lim_{x\to 0}x^\alpha=0$ et on a $\ln\left(1+x^\alpha\right)\underset{0}{\overset{x}{\sim}}x^\alpha$, d'où

$$\frac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}>0$$

.
Ainsi f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\beta-\alpha<1$.
Si $\alpha=0$. On a $\ln\left(1+x^\alpha\right)=\ln 2$, d'où

$$\frac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x^\beta}\frac{\ln 2}{x^\beta}>0$$

.
Ainsi f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\beta<1$. Si $\alpha<0$. $\lim_{x\to 0}x^\alpha=+\infty$ et on a $\ln\left(1+x^\alpha\right)\underset{0}{\sim}\ln x^\alpha=\alpha\ln(x)$, d'où $\frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\underset{0}{\sim}\alpha\frac{\ln x}{x^\beta}>0$. Ainsi f est intégrable sur $[0,1]$ si et seulement si $\beta<1$.

2)

$$J_{14}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}\mathrm{d}t$$

Il faut étudier la convergence en fonction de la valeur du paramètre α.
Tout d'abord, on a : $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.
Or, on a:

$$\frac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{\alpha+\beta}}>0$$

et $t\mapsto\frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha+\beta>1$. On en déduit donc que l'intégrale J_{14} converge si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

3)

$$J_{15}=\int_0^1\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

On a: $\int_0^1\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x\leq\int_0^1 dx=1$. Donc, J_{15} est absolument convergente. On en déduit que l'intégrale J_{15} converge.

4)

$$J_{16}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

La fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0. Il suffit donc d'étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. En intégrant par parties (hypothèses vérifiées), on a:

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

. Comme $\lim_{b\to\infty} \frac{\cos b}{b} = 0$, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, on a:

$$\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$$

sur

$$[1,+\infty[$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est convergente.On en conclut que l'intégrale J_{16} est convergente.

Exercice 38

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1)
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}dt$$

2)
$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2t}}dt$$

3)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}e^{\sin t}dt$$

4)
$$\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4 \tanh t}dt$$

5)
$$\int_1^{+\infty} \frac{t^2 \operatorname{Arctan} t}{1+t^2}dt$$

6)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

7)
$$\int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$$

8)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\left(t^4+1\right)} dt$$

Correction de l'exercice 38 :

1) Vers 2, la fonction $\frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}$ est bornée. Vers l'infini, $\frac{1}{t^2\sqrt{lnt}}$ est majorée par $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable. (On peut dire aussi que le produit $tf(t)$ tend vers 0 à l'infini : c'est suffisant pour assurer la convergence de l'intégrale). Donc L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}} dt$ est convergente. Pour calculer la valeur de l'intégrale, on va poser $\sqrt{lnt} = v, t = e^{v^2}, dt = 2ve^{v^2} dv$

$$\frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}} dt = \frac{2ve^{v^2}}{ve^{2v^2}} dv = 2e^{-v^2} dv.$$
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}} dt = 2\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite F est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Posons $u = v\sqrt{2}, du = \sqrt{2}dv$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-v^2} dv$$
$$\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}(F(\infty) - F(\sqrt{2\ln 2}))$$
$$2\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\infty} e^{-v^2} dv = 2\sqrt{\pi}(F(\infty) - F(\sqrt{2\ln 2})) = 2\sqrt{\pi}(1 - F(\sqrt{2\ln 2}))$$
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}} dt = 2\sqrt{\pi}(1 - F(\sqrt{2\ln 2}))$$

2) Deuxième intégrale.
De $t = 1$ à l'infini, $\frac{1}{\sqrt{2t}}$ varie, de façon monotone, de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0 , donc $\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{\sqrt{2t}}$ varie, de façon monotone, de $\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\operatorname{Arctan} 0 = 0$. La fonction numérique $\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2t}}$ est donc bornée sur l'intervalle d'intégration. Au voisinage de l'infini, $t \times \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2t}}$ est équivalent à $\frac{t}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\frac{t}{2}}$ qui tend vers l'infini, donc : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$ n'est pas convergente.

3) Troisième intégrale.
Au voisinage de 1, $\frac{1}{t}e^{sint}$ reste borné. Au voisinage de l'infini, $t \times \frac{1}{t}e^{sint} = e^{sint}$ ne tend pas vers 0 car c'est une fonction périodique:

$$\frac{1}{t}e^{-1} \leq \frac{1}{t}e^{\sin t} \Rightarrow e^{-1}\int_1^a \frac{1}{t} dt = \frac{\ln a}{e} \leq \int_1^a \frac{1}{t}e^{\sin t} dt.$$

Lorsque a tend vers l'infini, $\frac{\ln a}{e}$ tend vers l'infini, donc : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}e^{\sin t} dt$ n'est pas convergente.

4) Quatrième intégrale.
Au voisinage de 1, $\frac{t^4+1}{t^4 \tanh t}$ est borné, donc il n'y a pas de problème de convergence en 1 . Vers

l'infini, $\frac{t^4+1}{t^4 \text{ tanht}}$ tend vers $1 \neq 0$, puisque $\frac{t^4+1}{t^4}$ tend vers 1 et $\tanh t = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ tend vers 1 , donc l'intégrale n'est pas convergente : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4 \text{ tanht}} dt$ n'est pas convergente.

5) Cinquième intégrale.
Au voisinage de 1, $\frac{t^2 \text{ Arctant}}{1+t^2}$ est équivalent à $\frac{\pi}{8}$, il est borné, donc il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale en 1. Vers l'infini, l'application $t \mapsto \frac{t^2 \text{ Arctant}}{1+t^2}$, équivalente à Arc tan $t \times \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$, est monotone croissante et tend vers $\frac{\pi}{2} \neq 0$, donc l'intégrale ne saurait être convergente.
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2 \text{ Arctant}}{1+t^2} dt$ n'est pas convergente.

6) Sixième intégrale.
Au voisinage de 1, $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ reste borné et il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale en 1. Nous savons, comme conséquence du théorème de Cauchy, que : Si f est une fonction définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante à partir d'une certaine valeur, et tendant vers 0 avec $\frac{1}{x}$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x dx$ est convergente.
Ici, pour $t > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Donc :
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\text{cost}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

7) Septième intégrale.
Dans l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$, posons $u = \sqrt{t}, du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, t = u^2$, $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = 2 \cos u^2 du$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^{+\infty} \cos u^2 du$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

8) Huitième intégrale.
Vers 0, $\frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}$, équivalent à $t\left(1 - t^4\right)$ tend vers 0 : il n'y a donc pas de problème de convergence en 0. Vers l'infini, $\frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}$ est positif et majoré par $\frac{1}{t(t^4+1)} \leq \frac{1}{t^5}$, qui est intégrable, donc : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)} dt$ est convergente.

Exercice 39

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1)
$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$$

2)
$$\int_0^1 (\ln t)^2 dt$$

3)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

4)
$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{\left(t^2+1\right)^2} dt$$

5)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}dt$$

6)

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}dt$$

7)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{1-3t+2t^2}dt$$

8)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^4}dt$$

Correction de l'exercice 39 :

1) Première intégrale. Soit I_n l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt, n$ entier ≥ 0. L'exponentielle l'emporte sur la puissance, donc à l'infini, $t \times t^n e^{-t}$ tend vers 0 et l'intégrale converge.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

Intégrons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$, pour $n \geq 1$, par parties en posant $u = t^n, du = nt^{n-1}dt$. Pour avoir $dv = e^{-t}dt$, on prend $v = -e^{-t}$.

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \int udv = uv - \int vdu = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^{\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt = nI_{n-1}.$$

$$I_n = nI_{n-1}, \text{avec } I_0 = 1.$$

Par une récurrence immédiate, nous voyons donc que I_n converge pour tout entier n, et sa valeur est donnée par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour $n = 3$: $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}dt = 6$.

b) Deuxième intégrale.

Nous pouvons relier le calcul de l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^n dt$ à celui de l'intégrale précédente

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

en posant : $t = e^{-x}, dt = -e^{-x}dx$. $(\ln t)^n = (-1)^n x^n$. Pour $t = 0, x$ est infini. Pour $t = 1, x = 0$.

$$\int_0^1 (\ln t)^n dt = -(-1)^n \int_{\infty}^{0} x^n e^{-x}dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

$$\int_0^1 (\ln t)^n dt = (-1)^n n!, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour $n=2$: $\int_0^1(\ln t)^2 dt=(-1)^2 2!=2$.

2) Troisième intégrale. A l'infini, $t\times\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ tend vers 0 , donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt$ converge. Vers 1, $\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ reste fini et il n'y a pas de problème de convergence. On pose $t=\sinh u, 1+t^2=\cosh^2 u, dt=\cosh u du$. Pour $t=1, u=\operatorname{Arg}\sinh 1$. Pour t infini, u est infini.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt=\int_{\operatorname{Arg}\sinh 1}^{+\infty}\frac{du}{\sinh u}$$

On ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle en posant $\tanh\frac{u}{2}=x$. $\sinh u=\frac{2x}{1-x^2}$; $u=2\operatorname{Arg}\tanh x, du=2\frac{dx}{1-x^2}$. Pour u infini, x tend vers 1 . Si $\sinh u=1, \frac{1}{2}\left(e^u-e^{-u}\right)=1, e^u-e^{-u}=2$. Avec $y=e^u>0$: $y-\frac{1}{y}=2, y^2-2y-1=0,(y-1)^2=2, y=1+\sqrt{2}, u=\ln(y)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\sinh 1\right)=\tanh\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$-\ln\left|\tanh\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\sinh 1\right)\right|=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

3) Quatrième intégrale.

Vers 0 , la puissance l'emporte sur le logarithme et la fonction est bornée : il n'y a pas de problème de convergence. Vers l'infini, la puissance l'emporte sur le logarithme et $t\times\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}$ tend vers 0 , donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$ converge

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int_0^1\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$$

Dans $\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$, posons $u=\frac{1}{t}$. Il vient $t=\frac{1}{u}, dt=-\frac{du}{u^2}$;

$$\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{u^4\ln u}{u\left(1+u^2\right)^2}\frac{du}{u^2}=\frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^2}du$$

$\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int_1^0\frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^2}du=-\int_0^1\frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^2}du=-\int_0^1\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$ (en changeant de u en t le nom de la variable muette).

$$\int_0^1\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=0$$

D'où le résultat :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=0$$

4) Cinquième intégrale.

Le changement de variable $\tan t=u$ transforme l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan t}dt$ en $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}du$. Vers

0, $\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$ reste borné, il n'y a pas de problème de convergence. Vers l'infini, $u\times\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$ tend vers 0 , donc l'intégrale converge. Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}du$, posons $u=x^2, x\geq 0$.

$$du=2xdx, \sqrt{u}=x$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}du=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$
$$1+x^4=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$
$$2\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

On trouve les coefficients a,b,c,d, en réduisant au même dénominateur et en identifiant :

$$(ax+b)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+(cx+d)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)=2x^2$$

Terme en x^3 : $a+c=0$. Terme en x^2 : $b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}=2$. Terme en x : $b\sqrt{2}+a-d\sqrt{2}+c=0$. Terme constant : $b+d=0$.

$$b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}=2 \text{ et } b+d=0\Rightarrow a-c=\sqrt{2}.$$
$$a+c=0 \text{ et } a-c=\sqrt{2}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } c=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned}2\frac{x^2}{1+x^4}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan t}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Le terme tout intégré est nul et il reste :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}x \pm 1)^2 + 1\right)$$

On pose $u = \sqrt{2}x \pm 1$: il vient $dx = \frac{\sqrt{2}}{2}du, \frac{1}{x^2 \pm \sqrt{2}x+1}dx = \sqrt{2}\frac{du}{1+u^2}$

Pour $x = 0, u = \pm 1$. Pour x infini, u est infini.

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{Arctan}\, 1 - \text{Arctan}(-1)) = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$$

5) Sixième intégrale.

Pour $t = \ln 2$, la fonction $\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}$ est bornée, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale. Pour t infini, la fonction $t \times \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}$ est équivalente à te^{-t} : l'exponentielle l'emporte sur la puissance, le produit tend vers 0 et l'intégrale converge.

On ramène le calcul de l'intégrale $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1} dt$ à l'intégration de fractions rationnelles en posant

$$u = \tanh\frac{t}{4} : \sinh\frac{t}{2} = \frac{2u}{1-u^2}, \cosh\frac{t}{2} = \frac{1+u^2}{1-u^2}, dt = 4\frac{du}{1-u^2}.$$

Pour $t = \ln 2, u = \frac{e^{\frac{\ln 2}{4}} - e^{-\frac{\ln 2}{4}}}{e^{\frac{\ln 2}{4}} + e^{-\frac{\ln 2}{4}}} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Pour t infini, $u = 1$.

$$\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1} = \frac{1+e^t}{(e^t-1)^2} = e^{-\frac{t}{2}}\frac{2\cosh\frac{t}{2}}{4\sinh^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cosh\frac{t}{2}-\sinh\frac{t}{2}\right)\frac{\cosh\frac{t}{2}}{\sinh^2\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(1-u)^2}{1-u^2}\frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{(1-u^2)^2}{4u^2} = \frac{1}{8}(1-u)^2\frac{1+u^2}{u^2}$$
$$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}dt = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{t}{2}-\sinh\frac{t}{2}\right)\frac{\cosh\frac{t}{2}}{\sinh^2\frac{t}{2}}dt = \int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{8}(1-u)^2\frac{1+u^2}{u^2}4\frac{du}{1-u^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2}du$$
$$\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2} = \left(\frac{2}{1+u}-1\right)\left(1+\frac{1}{u^2}\right) = \frac{2}{u^2(1+u)}+\frac{2}{1+u}-\frac{1}{u^2}-1$$
$$\frac{2}{u^2(1+u)} = \frac{2}{u^2}+\frac{2}{1+u}+\frac{a}{u}$$
$$\frac{a}{u} = \frac{2}{u^2(1+u)}-\frac{2}{u^2}-\frac{2}{1+u} = \frac{2-2(1+u)-2u^2}{u^2(1+u)} = -\frac{2}{u}, a=-2.$$
$$\frac{1-u}{1+u}\frac{1+u^2}{u^2} = \frac{2}{u^2}+\frac{2}{1+u}-\frac{2}{u}+\frac{2}{1+u}-\frac{1}{u^2}-1 = \frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{4}{1+u}-1$$
$$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}dt = \frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{4}{1+u}-1\right)du$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_{3-2\sqrt{2}}^{1} - [\ln u]_{3-2\sqrt{2}}^{1} + 2[\ln(1+u)]_{3-2\sqrt{2}}^{1} - \frac{1}{2}[u]_{3-2\sqrt{2}}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2}(1-(3+2\sqrt{2})) + \ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + 2\left(\ln 2 - \ln\left(4-2\sqrt{2}\right)\right) - \frac{1}{2}(1-(3-2\sqrt{2}))$$
$$= -\frac{1}{2}(-2-2\sqrt{2})\Big) + \ln\left(3-2\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}(-2+2\sqrt{2})\Big)$$
$$= 2-2\ln 2$$
$$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}dt = 2-2\ln 2$$

6) Septième intégrale.
$1-3t+2t^2 = (2t-1)(t-1)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Dans l'intervalle $]0;\frac{1}{2}[, 1-3t+2t^2 = (1-2t)(1-t)$, avec $1-2t>0$ et $1-t>0$ Dans cet intervalle, on peut donc écrire : $\ln\frac{1}{1-3t+2t^2} = -\ln(1-2t)-\ln(1-t)$ $\ln(1-t)$ varie de 0 à $-\ln 2$, il reste borné, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale. Analyse - Chapitre 11 - Exercice 15 Page 7 sur 9 On peut calculer $\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-2t)dt$ en faisant d'abord la changement de variable $u=1-2t, dt=-\frac{1}{2}\,du$. Pour $t=0, u=1$. Pour $t=\frac{1}{2}, u=0$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-2t)dt = -\frac{1}{2}\int_1^0\ln u du = \frac{1}{2}\int_0^1\ln u du.$$

Au voisinage de $1, \ln u$ reste borné, il n'y a pas de problème de convergence. Au voisinage de $0, u\ln u$ tend vers 0 , donc l'intégrale est convergente. Pour calculer $\int_0^1 lnudu$, on intègre par parties:

$$\int_0^1 \ln u du = [u \ln u]_0^1 - \int_0^1 du = -1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{1-3t+2t^2} dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-2t)dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-t)dt$$

Finalement, il reste :

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{1-3t+2t^2} dt = \frac{3}{2}$$

7) Huitième intégrale.

Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est une application paire de R dans R, on peut écrire (changement de variable $t \mapsto -t$) :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

Vers 0, $\frac{1}{1+t^4}$ est borné, il n'y a pas de problème de convergence de l'intégrale. Vers l'infini, $t \times \frac{1}{1+t^4}$ tend vers 0 : l'intégrale est convergente.

$$1+t^4 = \left(1+t^2\right)^2 - 2t^2 = \left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right)\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right)$$

Les deux facteurs du produit restent constamment strictement positifs dans l'intervalle d'intégration.

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{ct+d}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}$$

Pour trouver les coefficients a, b, c, d, on réduit au même dénominateur et on identifie :

$$(at+b)\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right) + (ct+d)\left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right) = 1$$

Terme en t^3 : $a+c=0$. Terme en t^2 : $\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0$. Terme en t : $\sqrt{2}b+a-\sqrt{2}d+c=0$. Terme constant : $b+d=1$.

$$b+d=1 \text{ et } \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0 \Rightarrow a-c=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$a-c=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } a+c=0 \Rightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } c=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$a+c=0 \text{ et } \sqrt{2}b+a-\sqrt{2}d+c=0 \Rightarrow b-d=0.$$

$$b-d=0 \text{ et } b+d=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \text{ et } d=\frac{1}{2}.$$

Finalement :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)$$

soit, en faisant apparaître aux numérateurs, les dérivées des dénominateurs :

$$\frac{1}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)$$

En intégrant de 0 à l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

$$t^2+\sqrt{2}t+1=\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left((\sqrt{2}t+1)^2+1\right)$$

$$\text{Posons } u=\sqrt{2}t+1, dt=\frac{\sqrt{2}}{2}du.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\sqrt{2}[\operatorname{Arctan}u]_{-\infty}^{+\infty}=\sqrt{2}\pi$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt=\sqrt{2}\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 40

Pour tout entier $n\in\mathrm{N}$, on pose $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$

1) Calculer I_0.
2) Montrer que, pour tout $n\in\mathrm{N}$, on a:

$$0\leq I_n\leq\frac{1}{n!}I_0.$$

3) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.
4) Montrer que, pour tout entier $n\in N^*$, on a :

$$I_n=I_{n-1}-\frac{1}{n!}.$$

5) Pour tout entier $n\in\mathrm{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$. Montrer que $I_n=e-S_n$.
6) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 40 :

1) Calcul de I_0.

$$I_0=\int_0^1 e^{1-t}dt=-e\left[e^{-t}\right]_0^1=e-1$$

$$I_0=e-1$$

2°/ Convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 0°}$

Majoration de I_n.

Pour tout entier n, I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[0,1]$: c'est donc un nombre positif. Lorsque t varie entre 0 et $1, t^n$ est majoré par 1 , donc :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} e^{1-t} dt = \frac{1}{n!} I_0.$$

On obtient bien la relation :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} I_0$$

Limite de la suite $(I_n)_n \geq 0$.

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 , donc $\frac{1}{n!} I_0$ tend vers 0 . La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs, majorée par une suite tendant vers 0 . D'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et sa limite est 0 .

2) Relation de récurrence. Pour un entier $n \geq 1$, calculons l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ en intégrant par parties. On pose : $u = \frac{t^n}{n!}$, donc $du = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$. Pour avoir $dv = e^{1-t} dt$, on prend $v = -e^{1-t}$. L'intégrale s'écrit $I_n = \int u dv = uv - \int v du = \left[-\frac{t^n}{n!} e^{1-t}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t} dt.$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

3) Suite $(S_n)_{n\geq 0}$ La relation de récurrence $I_k = I_{k-1} - \frac{1}{k!}$ donne, par sommation de $k=1$ à $k=n$:

$$I_1 + \ldots + I_n = I_0 + \ldots + I_{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!}$$

Simplifions par les termes communs à droite et à gauche, il reste :

$$\begin{aligned} I_n &= I_0 - (S_n - 1) \\ I_n &= e - 1 - (S_n - 1) \\ I_n &= e - S_n \end{aligned}$$

Lorsque n augmente indéfiniment, I_n tend vers 0 , donc $e - S_n$ tend vers 0 et S_n tend vers e.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} = e$$

Ce résultat s'écrit aussi : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$: c'est la "série de l'exponentielle", à encadrer et à savoir par coeur!

Exercice 41

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.
2) Prouver que la suite (I_n) est strictement monotone.
3) Montrer que (I_n) est convergente de limite 1 .
4) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx$
5) Établir $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx = 0$ et en déduire que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 42

Études de fonctions définies par une intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt.$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et déterminer f'. Donner le tableau de variation de f et son signe.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en déduire son signe.
3) Étudier les limites $\lim_{x\to0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 43 — ENSAA

On pose

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

où p et q sont des entiers naturels.

1) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ établir une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.
2) En déduire la valeur de $I(p,q)$.
3) Calculer les intégrales suivantes :
   (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)dt$
   (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt$
   (iii) $\int_0^1 \left(1-t^2\right)^p dt.$

Exercice 44 — Extrait ENSAA

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. On définit la fonction F sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1) Montrer que F est croissante sur $[a,b]$.
2) Montrer que si $F(b) = 0$ alors F est nulle sur $[a,b]$.
3) En déduire une démonstration de la propriété de stricte positivité de l'intégrale énoncé dans le cour.

Application : Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et P un polynôme à coefficients réels. On suppose que $\int_a^b (P(t))^2dt=0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 45 — Extrait ENSAA

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n=\int_1^e (\ln(x))^n dx.$$

1) Montrer que $(I_n)_{n\in IN^*}$ est une suite convergente.
2) Démontrer que :
$$\forall n\in IN^*,\quad I_{n+1}=e-(n+1)I_n.$$
3) Justifier que : $\forall n\in IN^*, 0\le I_n\le \frac{e}{n+1}$.
4) En déduire la limite de I_n et un équivalent simple quand $n\to+\infty$.

Exercice 46 — Intégrale de Wallis

On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

1) Calculer I_0 et I_1
2) Montrer que la suite (I_n) converge
3) Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}
4) Montrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant
5) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n$
6) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π

Correction de l'exercice 46 :

1) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$
   On pose $u=\frac{\pi}{2}-x\quad I_2=\int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du$
   Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}=2I_2$
   I_2 peut être calculée également à l'aide de la formule de récurrence trouvée en 2) Donc
   $I_0=\frac{\pi}{2}\quad I_1=1\quad I_2=\frac{\pi}{4}$
2) On cherche à montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée afin de montrer qu'elle converge. pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $0\leqslant\sin x\leqslant 1$ en multipliant par $\sin^n x$, on obtient pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $0\leqslant\sin^{n+1}x\leqslant\sin^n x$
   Donc, en intégrant sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient : $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$
   D'où $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$ La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 , donc elle converge .
3) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x dx$
   On intègre par partie: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n-1}x dx=\underbrace{\left[-\cos x\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0 \text{ pour } n\geqslant 1}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(n-1)\cos x\sin^{n-2}x dx}_{\text{pour } n\geqslant 2}$

$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2} x dx = (n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right] = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$

Donc $\forall n \geqslant 2 \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

4) pour $n \geqslant 2 \begin{cases} I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \end{cases}$ en multipliant membre à membre, on a:

$$I_n I_{n+1} = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1} I_{n-2} I_{n-1} \Leftrightarrow (n+1) I_n I_{n+1} = (n-1) I_{n-2} I_{n-1}$$

Néanmoins, cette récurrence est d'ordre 2 , donc on obtient que:

$$\begin{cases} (2n+1) I_{2n} I_{2n+1} = (2n-1) I_{2n-2} I_{2n-1} = \ldots = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2} \\ (2n) I_{2n-1} I_{2n} = (2n-2) I_{2n-3} I_{2n-2} = \ldots = 2 I_1 I_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \forall n \geqslant 0 \quad (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

5) d'après 2), $\lim_{n\to+\infty} I_n = l$, donc $\lim_{n\to+\infty} I_n I_{n+1} = l^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$
donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
On sait que la suite (I_n) est décroissante et converge vers 0 , donc $\forall n \geqslant 0 \quad I_n > 0$
Donc la suite $u_n = \frac{I_n}{I_{n+1}}$ est bien définie et est strictement positive.
Comme la suite (I_n) est décroissante, $u_n \geqslant 1$
On pose $u_n u_{n+1} = \frac{I_n}{I_{n+1}}\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$
Or $\frac{u_n}{u_{n+2}} = \frac{I_n}{I_{n+1}}\frac{I_{n+3}}{I_{n+2}} = \frac{I_n}{I_{n+1}}\frac{\frac{n+1}{n+2} I_{n+1}}{\frac{n}{n+1} I_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \geqslant 1$
C'est une récurrence d'ordre 2 , néanmoins, on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont décroissantes et minorées par 1.
On pose $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \geqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = b \geqslant 1$ puisque $\forall n \geqslant 1 \quad u_n \geqslant 1$
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n u_{n+1} = 1 = ab$ et que $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ on obtient que $a = b = 1$
d'où $u_n = \frac{I_n}{I_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ $\forall n \geqslant 0 \quad (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ donc $(n+1) I_{n+1}^2 = \frac{\pi}{2}\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\to}$ Donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

6) d'après 2) $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4} I_{2n-6} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2} I_0$
Donc $I_{2n} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\ldots5\times3}{(2n)\times(2n-2)\ldots4\times2} I_0 = \frac{\frac{2n!}{(2n)\times(2n-2)\ldots4\times2}}{[2n][2(n-1)]\ldots[2\times2][2\times1]}\frac{\pi}{2}$
Donc $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$
On en utilisant que $(n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ on trouve que $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$
Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} (2n+1) I_{2n+1}^2 = \frac{\pi}{2}$

Exercice 47 — ENSAT

Les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes? (Facultatif)

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx$
2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$
3) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$
4) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x} dx$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}$
6) $\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx$
7) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$
8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x) dx$
9) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx,$
10) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}} dx$
11) $\int_0^{+\infty} 2^{-x} x^4 dx$
12) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$

Exercice 48

Étudier les intégrales suivantes : $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^a \ln x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha \sin^3 x dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, (a>0)$$

Exercice 49 — Les intégrales de Fresnel (Extrait ENSAT)

Les intégrales de Fresnel :

$$F_1 = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx \quad \text{et} \quad F_2 = \int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx$$

sont utilisées en théorie de diffraction de lumière.

1) Montrer que les deux intégrales convergent.
2) Montrer que les deux intégrales ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 50 — Fonction Gamma d'Euler(Extrait ENSAT)

La fonction Γ d'Euler est définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Montrer que :

1) $\Gamma(x)$ est bien définie, $\forall x \in]0,+\infty[$.
2) $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$.
3) En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)\,!$.

Exercice 51 — Extrait ENSAT

On considère l'intégrale généralisée

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \geq 1.$$

1) Calculer I_1 et I_2.
2) Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \geq 1$.
3) Trouver une relation récurrente entre I_{n+1} et I_n.
4) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
5) Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 52 — Extrait ENSAM

(7pts)

1) Soit f une fonction définie, continue, positive, décroissante et possédant une dérivée continue sur $[a, \infty[$, ct telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Montrer que les deux intégrales: $\int_a^{+\infty} f(x)\sin x dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)\cos x dx$ sont convergentes. (on fera la preuve juste pour la 1 ère intégrale, le même raisonnement est valable pour les 2).
2) Montrer que:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ et } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$
   sont convergentes. Sont-elles absolument convergentes? (indication : $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$)
3) Étudier:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$$
   Que peut-on en conclure concernant. la règle d'étude d'une intégrale généralisée par équivalence?

Exercice 53 — Examen ENSAK 2018

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sint}}{t} dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$$

1) Justifier que, pour tout $n \geq 0, I_n$ et J_n sont bien définis.
2) Montrer que, pour tout $n \geq 1, I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.
3) Soit $\phi : \{0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à laide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin((2n+1)t)dt$ tend vers 0
4) Démontrer que la fonction $t \to \frac{1}{t} - \frac{1}{\text{sint}}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
5) En déduire que $J_n - I_n \to 0$.

6) Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$.

7) En déduire la valeur de I.

Exercice 54 **ENSAK**

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln(x))^n dx.$$

1) Calculer I_1.

2) a) Montrer que pour tout $x \in [1, \text{e}\ ]$ et $n \in \mathbb{N}, 0 \leq (\ln(x))^{n+1} \leq (\ln(x))^n$. En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

   c) Montrer que pour tout $x \in [1, e] : 0 \leq \ln(x) \leq x/e$.

   d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3)

4) a) A l'aide d'une intégration par parties,établir pour tout entier naturel

$$n \geq 1 : I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} n \cdot I_n$

Exercice 55 **ENSAK**

On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

1) Étude de la convergence de I :

   a) Justifier que $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.

   b) Vérifier que pour tout $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1-\cos(A)}{A} - 1 + \cos(1) + \int_1^A \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx.$$

c) Montrer que l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est convergente, conclure la nature de I puis l'exprimer en fontion de J.

2) I ne converge pas absolument :

   a) Justifier que pour tout $x \geq 1$, $\frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{\sin^2(x)}{x}$.

   b) En intégrant par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est convergente.

   c) Déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$ est divergente.

d) Conclure que I ne converge pas absolument.

Exercice 56 — ENSAO

On considère la fonction rationnelle F définie par $F(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

1) Trouver les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, on ait:

$$F(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

2) Calculer alors $\int_0^1 F(x)dx$.

Exercice 57 — ENSAO

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 e^x x^n dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) En encadrant la fonction e^x sur $[0, 1]$, montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
3) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
4) En déduire la limite de nI_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 58 — ENSAO

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+x-2}dx$$

Exercice 59

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1) En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 60 — ENSAO

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^x (\tan t)^n dt$

1) Pour quels réels x, l' intégrale I_n est-elle définie ? Justifier.

2) Calculer I_1 et I_2.
3) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $I_n = \int_0^{\tan x} \frac{u^n}{1+u^2} du$
4) En utilisant $u^{n+2} = (1+u^2)\, u^n - u^n$, montrer la relation de récurrence

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1} - I_n$$

Exercice 61

Soit $\quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad n \in \mathbb{Z}$.

1) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}, I_n$ existe t-il?.
2) Établir une relation de récurrence entre les I_n
3) Calculer I_n.

Exercice 62

Soit la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{t}^{\mathrm{x}-1} \mathrm{e}^{-t} dt$.

1) Quel est l'ensemble de définition de Γ
2) trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$
3) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 63

On considère l'intégrale $\quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$

1) Établir une relation de récurrence entre I_n et $I_{n-1}, n \in N^*$
2) Calculer I_{o} puis en déduire la valeur de I_n en fonction de n
3) En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez une autre expression de I_n. Que peut-on en conclure?

Exercice 64 — Exercice 1 (10 pointe) (ENSATE)

On considère l'intégrale généralisé :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

1) Montrer que d'intégrale I_n converge pour tout $n \geq 1$
2) A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}du$$

3) A l'aide du changement de variable $w = u - \frac{1}{u}$ Calculer I_1.
4) Trouver une relation récurrente entre I_{n+1} et I_n
5) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
6) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 65

On considère l'intégrale $\quad I_n = \int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!}dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer I_1
2) Établir une relation de récurrence entre I_n et $I_{n-1} \quad (n \geq 2)$
3) Calculer I_u en fonction de n
4) Déterminer, pour n fixé, la limite de $I_n(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$
5) On pose $J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!}dt$. Montrer que pour tout $n \in N^* : 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$
6) On pose $L_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. Montrer, en utilisant le calcul de I_n que : $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{U_n} \leq \mathrm{e} \leq \mathrm{U_n} + \frac{1}{\mathrm{n!}}$.
7) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 66

Pour tout entier $n \in \mathrm{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$.

1) Calculer I_0.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{N}$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}I_0$$

En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

3) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathrm{N}^*$, on a :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

4) Pour tout entier $n \in \mathrm{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$. Montrer que $I_n = e - S_n$. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Les intégrales dépendant d'un paramètre (ENSAJ)

Exercice 67

Soit $\varphi(t,x)=e^{-t^2-x^2/t^2}$, $(t,x)\in\left]0,+\infty\right[\times[0,+\infty[$.

1) Montrer la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t \text{ pour tout } x\in[0,+\infty[$$

2) On pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)\mathrm{d}t$.
   a) Prouver que $\forall u\in[0,+\infty[, 0\leq 1-e^{-u}\leq\min(1,u)$.
   b) En déduire que $\forall x\in\left[0,+\infty\right[, |f(x)-f(0)|\leq\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
   c) Montrer alors que f est continue en 0^+.
3) On admet que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty\left[, f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t\right.$.Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a : $\forall x\in]0,+\infty[, f'(x)=-2f(x)$.
4) En déduire l'expression de f sur $[0,+\infty[$ sachant que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 68

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\int_x^{3x}\arctan\left(t^2\right)dt.$$

1) Montrer que f est impaire.
2) Calculer f' et montrer que f' est positive.
3) En utilisant la deuxième égalité de la moyenne montrer que $f(x)\sim\pi x$ au voisinage de $+\infty$.
4) Montrer que si $x>0, \pi x-f(x)=\int_x^{3x}\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$.
5) En utilisant la deuxième égalité de la moyenne, montrer que cette différence tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 69

1) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$. Montrer que si g est décroissante alors f est nulle.
   Indication : on établira le tableau de signe de la fonction $G:x\mapsto\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$.(1.5 pts)

Exercice 70

1) Calculer l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
2) (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(x)=\frac{3}{x^3+1}$.
   (b) Calculer l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$
   (c) Calculer l'intégrale $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 71

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs dérivées :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt \quad g(x) = \int_0^x xf(t)dt \quad g(x) = \int_0^x f(t+x)dt$$

Exercice 72

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.
2) En déduire que la fonction $x \longmapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} \,\mathrm{d}t\right)^2$ est constante.
3) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 73

On considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que F est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 74

On considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que F est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 75

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

1) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$.
3) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 76

Soit G la fonction définie par

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\, \mathrm{d}t$$

1) Déterminer le domaine de définition de G,
2) Calculer $G(0)$ et $G(x)$ pour $x \neq 0$.
3) Que peut-on déduire?.

Exercice 77

(6 points) On considère la fonction F, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

1) Énoncer le théorème de continuité sous le signe intégrale.
2) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
3) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
4) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de $F'(x)$, sous forme intégrale.

Exercice 78

(4 points)

L'objectif de cet exercice est de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t$.

1) a) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t$.

   b) En déduire que la fonction F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2) a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

   b) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

   c) Montrer alors que F est solution de l'équation différentielle $y - y' = \frac{I}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

3) a) Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.

   b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$F(x) = e^x \left(\pi - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \right).$$

   c) En déduire la valeur de I.

Exercice 79

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Prouver que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Chercher une relation simple entre F et F'.
4) En déduire la valeur de $F(x)$. (on admet que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Exercice 80 — ENSA KECH

Pour $x \in [1+\infty[$, on définie

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t+1)x}}{t+1} dt$$

1) Expliquer pourquoi la fonction F est bien définie.
2) Rappeler quel est l'énoncé du théorème de dérivabilité de fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
4) Déduire de ce qui précède l'expression explicite de $F'(x)$.
5) Justifier la formule : $F(x) = \int_x^{+\infty} s^{-1}e^{-s}ds$.
6) Justifier la formule : $F(x) + \ln x = \int_1^x s^{-1}(1-e^{-s})\, ds + \int_1^{+\infty} s^{-1}e^{-s}ds$.

Exercice 81 — ENSA KECH

Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

1) Montrer que pour tout $a > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$ est convergente.
2) En déduire que I converge.
3) Pour $x > 0$, établir la relation

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

4) En déduire le calcul de I.
5) En déduire le calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ (On pourra utiliser le changement de variables $t = e^{-s}$).

Exercice 82 — ENSA KECH

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

1) Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2) Calculer $I_1(x)$.

3) Démontrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

4) En déduire qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $x>0$, on a

$$I_n(x)=\frac{\alpha_n}{x^{2n-1}}$$

Exercice 83 **ENSA KECH**

Partie I : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1) Montrer que pour tout $x>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On note $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in]0,+\infty[$, par : $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer : $\forall x\in]0,+\infty[, f(x)\geqslant\int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$. En déduire $f(x)\underset{x\to0+}{\longrightarrow}+\infty$.

3) Montrer : $\forall x\in]0,+\infty\left[,0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}\right.$. En déduire $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

4) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad\left|f(x)-\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t..$$

En déduire : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5) Soit $(x,h)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h\geqslant-\frac{x}{2}$.
(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
(b) Établir : $\forall t\in\left[0,+\infty\right[,\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{2|h|}{x^3}$.
(c) En déduire: $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2|h|}{x^3}$.

6) En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x\in]0,+\infty\left[,f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right.$.

7) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

8) En déduire : $\forall x\in]0,+\infty\left[,f'(x)=-\frac{1}{x}+f(x)\right.$.

9) Montrer que f que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x\in]0,+\infty\left[,f''(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x)\right.$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x>0$, par : $g(x)=e^{-x}f(x)$.

10) Démontrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x\in]0,+\infty[,g'(x)=-\frac{e^{-x}}{x}$..

11) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ converge et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u.$$

puis : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$

12) Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 84 — ENSA KECH

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt.$$

1) Montrer que I est convergente.
2) Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
3) Montrer que $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt.\ dx$.
4) En déduire la valeur de I.

Exercice 85 — ENSA KECH

Soit $\alpha > 0$ un réel. On note $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha} dt$.

1) pour quelles valeurs de α l'intégrale généralisée I_α est-elle convergente ? Calculer I_1.
2) Par une intégration par parties, montrer que $I_1 = 2(I_1 - I_2)$. En déduire la valeur de I_2.
3) En utilisant le changement de variable $t = \tan x$, calculer la valeur de $I_{\frac{3}{2}}$.

Exercice 86

Pour tout entier positif n, on considère $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{e^x-1} dx$.

1) Montrer que I_n est bien définie et déterminer la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
   b) Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

Exercice 87 — ENSAMC

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(tx)|}{t}\, \mathrm{d}t$.

1) a) Justifier proprement la définition de F.
   b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$et calculer sa dérivée.
2) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que: $\frac{2}{(k+1)\pi} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k\pi}$.
   b) On rappelle que: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. Prouver que: $F(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n$.
   c) En déduire l'équivalent: $F(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$.

Exercice 88 — ENSAK

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} dt$

1) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est une fonction impaire.
3) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivé.

4) Vérifier que $F'(x) = \frac{3\left(1-4x^4\right)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\cdot\sqrt{x^4+x^2+1}\cdot\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$ sur $\mathbb{R}$.

5) Étudier les variations de F et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$.

6) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$. En déduire la limite de F en $+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

7) Donner l'équation de la tangente de F en 0 .

8) Représenter graphiquement la fonction F.

Les intégrales multiples

Exercice 89 **ENSAM**

Donner la représentation graphique de A et calculer l'intégrale $I = \int_A f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants : 1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ et $f(x,y) = x+y$

2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ et $f(x,y) = x+y$

Exercice 90

Soient $A\ \sqrt{x^2+y^2}$. 2.1 - Donner la représentation graphique de A.

2.2 - Calculer en utilisant le changement de variable approprié l'intégrale $I = \int_A f(x,y)dxdy$.

Exercice 91

Déterminer la représentation graphique de A et calculer son aire dans les cas suivants : 1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/|x+y| \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2-2y \geq 0, x^2+y^2-1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$

Exercice 92

Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \text{ avec } a,b,c > 0.$$

4.1 - Calcule le volume de V.

4.2 - Calculer l'intégrale $\int_V xdxdydz$.

Exercice 93

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) = (X,Y)$. 5.1 - Vérifier que $X^2+Y^2 = (x^2+y^2)^2$.

5.2 - Calculer le Jacobien de ϕ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5.3 - Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq x^2-y^2 \leq 4$ et $1 \leq xy \leq 2\}$.

a) Donner la représentation graphique de D.

b) En utilisant le changement de variables $X = x^2-y^2, Y = 2xy$, calculer l'intégrale $\int_D (x^2+y^2)^3 dxdy$

Exercice 94

6.1 - Calculer l'intégrale $I = \int_D x^y dxdy$ avec $D = [0,1]\times[a,b], b > a > 0$

6.2 - En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

Exercice 95

On considère l'intégrale $I_a = \int_{A_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$ avec $A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$ 7.1 - Calculer I_a en fonction de a. En déduire $\lim_{a\to+\infty} I_a$. 7.2 - On considère le rectangle $R_a = [-a,a]\times[-a,a]$ et $J_a = \int_{R_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$. Calculer l'intégrale simple $\int_{-a}^a e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ en fonction de J_a. 7.3 - En utilisant les questions 7.1 et 7.2, calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$

Les intégrales curvilignes

Exercice 96

Soient les points $\mathrm{A}=(1,0), \mathrm{B}=(0,1)$ et $\mathrm{C}=(1,1)$. Calculer les trois intégrales curvilignes :

$$I_k=\int_{\Gamma_k}\left\{\left(y^2-y\right) dx-2\left(x^2-x\right) dy\right\} \quad K=1,2,3$$

où Γ_1 est la ligne brisée OAC, Γ_2 la ligne brisée OBC et Γ_3 le segment OC. Le résultat est-il dépendant du chemin suivi ?

Exercice 97

(a) On considère la forme différentielle $\omega=e^x dx+3 y^2 dy$. Est-elle exacte? (Sur quel domaine?) Si oui l'intégrer

(b) Même question avec $\omega=\left(2 x e^y+1\right) dx+\left(x^2 e^y-2 y\right) dy$.

Exercice 98

Calculer l'intégrale curviligne $I=\int_{\Gamma} y^2 dx+x^2 dy$ où Γ est la demi-ellipse supérieure d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parcourue dans le sens positif.

Exercice 99

Calculer l'intégrale curviligne $I=\int_{\Gamma}\left(x^3-y\right) dx+(x+y) dy$ où Γ est le cercle d'équation $x^2+y^2-1=0$ parcouru dans le sens positif.

Exercice 100

Soit D le demi-disque supérieur de centre $O(0,0)$ et de rayon $a(a>0)$ Soit ∂D^{+}son bord supérieur parcouru dans le sens positif. Calculer de deux manières différentes $\int_{\partial D^{+}} x^2 y dx+ xy(2 a-y) dy$

Exercice 101

Calculer $\iint_D\left(x^3+y^3\right) dx dy$, où $D=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

Exercice 102

Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}$ sur le périmètre Γ du triangle OAB parcouru dans le sens direct :

$$\vec{V}=\begin{pmatrix} x+y^2 \\ x^2+y \end{pmatrix} \quad A=(2,0) \text{ et } B=(0,1)$$

(a) Par une intégrale curviligne.

(b) En utilisant la formule de Green.

Les courbes Paramétrés

Exercice 103

Soit f une courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y), soit par une équation polaire r. Pour chacune des propriétés suivantes, déterminer l'ensemble le plus petit possible sur lequel on peut se contenter d'étudier (x, y) ou r pour obtenir le tracé complet du support de f :

1) x est 2-périodique et y 3-périodique.

2) x est π-périodique et y 1-périodique.

3) x est paire et y impaire 2π-périodique.

4) r est 3π-périodique et: $\quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(2\pi - \theta) = r(\theta)$.

5) r est 2π-périodique et : $\quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r(\theta)$.

6) r est impaire et : $\quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -r(\theta)$.

7) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+1) = f(t) + \vec{u}, \quad$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul.

Exercice 104

Étudier la courbe paramétrée $f = (x, y)$ définie par :

1) $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{cases} x(t) = (t+1)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-1)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}.$

2) $\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}, \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}.$

3) $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4} - t \\ y(t) = \frac{t^2}{6} + \frac{1}{t^2} \end{cases}$

4) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \ln t \end{cases}.$

5) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = t^5 - 6t^3 + 9t \\ y(t) = 3t^2 - t^4 \end{cases}.$

6) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = t - \sin^2 t \\ y(t) = \cos t \end{cases}.$

7) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.$

8) $\forall t \in \mathbb{R}^*, \begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = e^{\frac{1}{t}} \end{cases}.$

9) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \cos \frac{3t}{2} \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}.$

10) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \cos \frac{3t}{2} \\ y(t) = 2\sin t + \cos(2t) \end{cases}$

Exercice 105

1) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $\ln(x+y) = x - y$.

a) Paramétrer $\mathcal{C}$ au moyen du paramètre $t = x + y$.

b) Étudier et tracer la courbe paramétrée $f = (x, y)$ ainsi définie.

2) Mêmes questions avec la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $y \ln \frac{y}{x} = x^2$.

Exercice 106

Étudier la courbe paramétrée f d'équation polaire r définie par :

1) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = 1 + \sin \frac{3\theta}{2}$.

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = 3 \cos \theta - \cos(3\theta)$.

3) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \cos(5\theta)$.

4) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta + 2}$.

5) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \frac{1 + \sin \theta}{\sqrt{3} + \cos \theta}$.

6) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta) = \cos(3\theta) - 2$.