Conforme avec le programme des FST et ENSA(M)

Be In Sciences

Centre de soutien en-ligne

Hamza ICHOU

Analyse II

Inscription ouverte : préparation aux examens :

Les notions abordées dans ce document :

- Les intégrales de Riemann
- Développement limité
- Équations différentielles
- Les intégrales généralisé
- Les séries numériques

Série 0 :

Exercice 1 **ENSAO DS 2014/2015**

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}$$

1) Déterminer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 1 .
2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et on précisera la valeur de $g(0)$.
3) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, calculer $g'(0)$.

Exercice 2 **ENSAO DS 2014/2015**

1) Déterminer la ou les valeurs du réel a tel que $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}+e^{x}-2}{x^2}$ existe et soit finie.
2) Donner le développement limité généralisé en $+\infty$ à l'ordre 3 de $\frac{x}{x-1}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 3 **ENSAO DS 2015/2016**

1) Rappeler le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$.
2) Donner les DL à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arctan(x) \quad ; \quad g(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{1-x}$$

3) Montrer que si $x \to +\infty$, on a le développement

$$(x-1)\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

où a, b, c et d à déterminer.

Exercice 4 **ENSAO DS 2015/2016**

Trouver au moyen des développements limités les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1} \quad ; \quad L_2 = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin(x)} - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Exercice 5 **ENSAO DS 2015/2016**

Soit l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_0^1 x\sqrt{1-\lambda^2 x^2}dx, \quad \lambda \in [-1,1].$$

1) Montrer que cette intégrale existe pour tout $\lambda \in [-1,1]$.
2) En effectuant le changement de variable $u = 1-\lambda^2 x^2$, calculer l'intégrale $I(\lambda)$ en fonction de λ.
3) Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\lambda \mapsto (1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}$. Utiliser ce DL pour déterminer $\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)$. Comparer au calcul direct de l'intégrale donnant $I(0)$.

Exercice 6 ENSAA

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0.$$

1) a) Donner un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   b) En déduire que f admet une droite l'asymptote et déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote au au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
2) Sachant que En déduire un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0^+et un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0^-.
3) Montrer que f coupe son asymptote en au moins un point d'abscisse comprise entre -1 et 0.
4) a) Montrer que $f'(x) = (x-1)g(x)$ où g est une fonction, à déterminer, dérivable pour $x \neq 0$.
   b) Étudier les variations de g et en déduire les variations de f.
5) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Et donner l'équation de la demi-tangente à droite au point 0 et l'équation de la demi-tangente à gauche au point 0 .
6) Tracer le graphe de f.

Exercice 7 ENSAA

1) Déterminer les développements limités suivants :
   a) $DL_2(0)$ de la fonction $\exp\left(\sqrt{1+x}\right)$
   b) $DL_4(0)$ de la fonction $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
2) Étudier la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Exercice 8 ENSAA

On considère la fonction f définie par:

1) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 .
2) On considère la fonction g définie par :

$$g(t) = \frac{\sin(t)-t}{t^2} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

   a) Déterminer la limite $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)-t}{t^2}$

b) En déduire que g est continue sur IR.
c) Montrer que $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} g(t)dt = 0$.
d) En déduire que f est continue en 0 .

3) a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que f est paire.
b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que pour tout x réel non nul on a

$$f'(x) = \frac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{x^2}.$$

c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
d) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2x}$$

Et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 9 — ENSAA

1) Rappeler, sans la justifier, la première formule de la moyenne. Application : Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable et continue en O et $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{si} \quad x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculer la limite suivante: $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g_n(x)dx$.

2) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note: $I = \int_a^b f(t)dt$. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, on pose : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On définit le réel $T_n(f)$ par: $T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$

(a) Soit $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$. À l'aide de deux intégrations par parties successives, établir la formule suivante (dite formule de MacLaurin) :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = (\beta-\alpha)\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)dt.$$

(b) Soit $M = \max_{[a,b]}|f"|$. En appliquant la formule de MacLaurin sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I - T_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Exercice 10 — ENSAA

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\sigma_n([a,b]) = \{a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \text{ et que } \quad a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Pour toute fonction g continue sur $[a,b]$, on pose:

$$R_n(g) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(a_k)$$

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et on pose : $I = \int_a^b f(t)dt$.

1) Interpréter graphiquement la limite de $R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right)$ lorsque $n\rightarrow+\infty$?
2) Pour tout $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, on note:

$$\Delta_k=\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt-\frac{b-a}{n} f\left(a_k\right)-\frac{(b-a)^2}{2n^2} f'\left(a_k\right).$$

-a- Justifier l'existence d'un réel M majorant $|f''|$ sur $[a,b]$. Calculer $\lim_{n\rightarrow+\infty} R_n\left(f'\right)$.
-b- En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[a_k,a_{k+1}]$, appliquée à la fonction primitive $F(x)=\int_{a_k}^{x} f(t)dt$, à l'ordre 2 , montrer que, pour tout $k\in\{0,\cdots,n-1\}$

$$|\Delta_k|\leq\frac{M(b-a)^3}{6n^3}.$$

3) Montrer que:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left|nI-nR_n(f)-\frac{(b-a)}{2}R_n\left(f'\right)\right|\leq\frac{M(b-a)^3}{6n}$$

4) Déduire de la question précédente que la suite $T_n=\left(n\left(R_n(f)-I\right)\right)_{n\in N^*}$ converge vers une limite α que l'on déterminera.
5) Montrer que lorsque $n\rightarrow+\infty$:

$$R_n(f)=I+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 11 — ENSAA

Soit la fonction f définie par: $f(x)=(x-1)^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1) Déterminer à l'aide des développements limités, l'asymptote à f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
2) Déterminer la position du graphe de f par rapport à l'asymptote au au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice 12 — ENSAA

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\log(1+x)$.

1) Soit $x\neq 0$, montrer, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$, qu'il existe un nombre réel $c_x\in]0,1[$ tel que :

$$c_x=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}.$$

On considère, ainsi, la fonction $\theta(x)$ à variable x définie par :

$$\theta(x)=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}.$$

2) Déterminer le développement limité de la fonction θ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
3) Montrer que la fonction θ peut être prolongée par continuité sur $]-1,+\infty[$.
4) En déduire, s'il existe, les nombres:

$$\theta(0),\theta'(0)\text{ et }\theta''(0).$$

Exercice 13 **ENSAA**

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégrale: Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tout a et b éléments de I, on a :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{n+1}(t)dt$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

1) Soit f une application continue par morceaux et croissance sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n>0$, on pose :

$$R_n=\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

En considérons une subdivision de l'intervalle $[a,b]$: $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ avec $0\leq k\leq n-1$. Prouver que :

$$0\leq R_n\leq\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).$$

2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, au point 0 à l'ordre 2, montrer que :

$$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}.$$

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$. A l'aide de deux intégrations par parties successives, établir la formule suivante (dite formule de MacLaurin) :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=(\beta-\alpha)\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(t-\alpha)(t-\beta)f''(t)dt.$$

Exercice 14 **ENSAA**

On considère la fonction f définie par:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\\ f(0)=\ln(2)\end{array}\right.\quad \text{si } x\neq 0$$

1) Donner le développement limité de la fonction $x\mapsto\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 .
2) On considère la fonction g définie par :

$$g(t)=\frac{\sin(t)-t}{t^2}\ \text{si}\quad x\neq 0\quad\text{et}\quad g(0)=0.$$

   a) Déterminer la limite $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)-t}{t^2}$
   b) En déduire que g est continue sur IR.
   c) Montrer que $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}g(t)dt=0$.
   d) En déduire que f est continue en 0 .
3) a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que f est paire.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x réel non nul on a

$$f'(x)=\frac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{x^2}.$$

c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
d) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

4) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2x}$$

Et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 15 — ENSAA

1) Calculer le D.L à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$.
2) Soient f et g deux fonctions qui admettent les D.L suivants au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \theta\left(x^6\right) \\ g(x) = x + ax^3 + bx^5 + \theta\left(x^6\right) \end{cases}$$

Déterminer a et b de telle sorte que $f \circ g(x) = x + \theta\left(x^6\right)$ quand $x \to 0$.

3) En utilisant les D.L usuels, déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\left[\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right].$$

4) Trouver l'équation de l'asymptote, au voisinage de $+\infty$, à la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 16 — ENSAA

On considère la fonction f définie, sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}, \pi + 2k\pi, k \in Z\right\}$, par :

$$f(x) = (1+\cos(x))^{1/\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

1) Donner l'expression de la fonction dérivée f'.
2) Calculer le D.L au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, à l'ordre 3 de la fonction

$$g(x) = \ln(1+\cos(x)).$$

3) Calculer le D.L au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, à l'ordre 2 de la fonction f.
4) En déduire la limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$
5) Soit g le prolongement de f par continuité en $\frac{\pi}{2}$. Montrer que g est dérivable au point $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 17 — ENSAA

1) Soient f et g deux fonctions qui admettent les D.L suivants au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \theta\left(x^6\right) \\ g(x) = x + ax^3 + bx^5 + \theta\left(x^6\right) \end{cases}$$

Déterminer a et b de telle sorte que $fog(x) = x + \theta\left(x^6\right)$ quand $x \to 0$.

2) Soit la fonction f définie par: $f(x) = (x-1)^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Déterminer l'asymptote et sa position par rapport à la graphe de f au au voisinage de $+\infty$.

3) Calculer l'intégrale et la primitive suivantes :

$$I=\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \quad \text{et} \quad \int \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx.$$

(On conseille, pour l'intégrale I de faire le changement de variable $x=\cos(u)$).

4) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini des suites définies par:

a) $U_n=\frac{1}{n}\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos^2\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$

b) $V_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{2}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right].$

Exercice 18 — ENSAA

1) Donner D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $\ln\left(1+x^2\right)$.

2) En déduire le D.L à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\left(1+x^2\right)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

3) Trouver l'équation de l'asymptote, au voisinage de $+\infty$, à la courbe de la fonction

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 19 — ENSAA

(8 points)

1) Soit f une fonction définie sur $]0,2[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{2-x}$$

Calculer les quatre premières dérivées successives de f au point $x_0=1$: c'est-à-dire $f^{(1)}(1), f^{(2)}(1), f^{(3)}(1)$, et $f^{(4)}(1)$.

2) Soient a un nombre réel strictement positif et f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle fermé $[-a,a]$, deux fois dérivables sur l'intervalle $]-a,a[$. On suppose de plus que $f(0)=0$ et que le fonction $|f''|$ est bornée sur l'intervalle ouvert $]-a,a[$. Déterminer, en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, la limite de la suite convergente $\left(u_n\right)_n$, définie par :

$$u_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{pour } n>\frac{1}{a}$$

Utiliser les résultats : $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Déterminer les nombres réels a et b de manière que la fonction g, définie par

$$g(x)=\cos(x)-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

admet le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 suivant

$$DL_0^6: \quad g(x)=\frac{x^6}{480}+o\left(x^6\right).$$

4) Donner un développement limité généralisé jusqu'à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction h définie par :

$$h(x)=\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)}$$
