Analyse S4 TD3 bis
Correction

Exercice 1 : Convergence d'intégrales

Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction des valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{1-t^\alpha}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1-x)^\beta}$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{\alpha t}} dt$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^\alpha}-1}{t^2} dt$ **5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{\alpha t} dt}{e^t \ln(\alpha+t)}$ **6.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-(\alpha+2)x}}{(\ln x)^\beta} dx$

1. Notons que $\alpha \neq 0$. Problème en $0, 1$ et $+\infty$.

   En 0 : $\displaystyle\frac{\ln t}{1-t^\alpha} \underset{0}{\sim} \ln t$ donc l'intégrale converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.

   En 1 : On pose $u = t-1$ $\quad du = dt$

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{1-t^\alpha} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(u+1)}{1-(1+u)^\alpha} du$$

   $\frac{\ln(u+1)}{1-(1+u)^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{u}{-\alpha u} = -\frac{1}{\alpha}$ donc la fonction est prologeable par continuité en 1.

   En $+\infty$: Si $\alpha > 1$, on choisit β tel que $\alpha > \beta > 1$

   $$\lim_{t\to+\infty} t^\beta \frac{\ln t}{1-t^\alpha} = 0$$

   par croissance comparée et donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge.

   Si $\alpha \leq 1$ alors

   $$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{1-t^\alpha} = +\infty$$

   donc l'intégrale diverge.

   Finalement, l'intégrale est convergente ssi $\alpha > 1$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1-x)^\beta}$ On doit avoir $\beta \in \mathbb{Z}$ sinon le domaine de définition de $(1-x)^\beta$ est $]-\infty, 1]$ et l'intégrale ne peut pas exister.

   Convergence en $+\infty$ ssi $\alpha + \beta > 1$.

   Convergence en 0 ssi $\alpha < 1$.

   Convergence en 1 ssi $\beta \leq 0$

   Finalement l'intégrale est divergente !

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{\alpha t}} dt$ n'existe pas pour $\alpha = 0$.

   Si $t \to 0$, $\displaystyle\frac{te^{-t}}{1-e^{\alpha t}} \underset{0}{\sim} \frac{t}{-\alpha t} \to -\frac{1}{\alpha}$ propre en 0 pour $\alpha \neq 0$.

   En $+\infty$: si $\alpha > 0$, $\displaystyle\frac{te^{-t}}{1-e^{\alpha t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{te^{-t}}{-e^{\alpha t}} = -te^{-(\alpha+1)t}$ donc l'intégrale converge car $\alpha + 1 > 0$ (critère de Riemann).

   si $\alpha < 0$, $\displaystyle\frac{te^{-t}}{1-e^{\alpha t}} \underset{+\infty}{\sim} te^{-t}$ donc l'intégrale converge (critère de Riemann).

   Finalement, l'intégrale converge ssi $\alpha > 0$.

Exercice 2 : Intégrale à paramètre 1

Considérons la fonction
$$F : x \to \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}\,dt$$

Donner son domaine de définition.

Si $x > 0$, $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{x}{t}} = 0$ donc la fonction $t \to e^{-\frac{x}{t}}$ est prolongeable par continuité en 0.
Si $x = 0$ $F(0) = \int_0^1 1dt = 1$
Si $x < 0$, $\lim_{t\to 0^+} te^{-\frac{x}{t}} = +\infty$ (croissance comparée) donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale diverge.
Finalement, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}^+$.

Montrer qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer $F''(x)$.

Pour $t \in \left]0,1\right]$ fixé, notons $h_t(x) = e^{-\frac{x}{t}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+$, $h_t^{(k)}(x) = \left(-\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{x}{t}}$ donc $h_t^{(k)}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, soient $a, b > 0$, $\forall x \in [a,b], \forall t \in \left]0,1\right], \left|h_t^{(k)}(x)\right| \leq \left(\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{a}{t}}$ et $\int_0^1 \left(\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{a}{t}}dt$ converge en 0 d'après Riemann.
Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, F$ est de classe C^k sur $[a,b]$ et donc sur $\mathbb{R}_*^+$ et

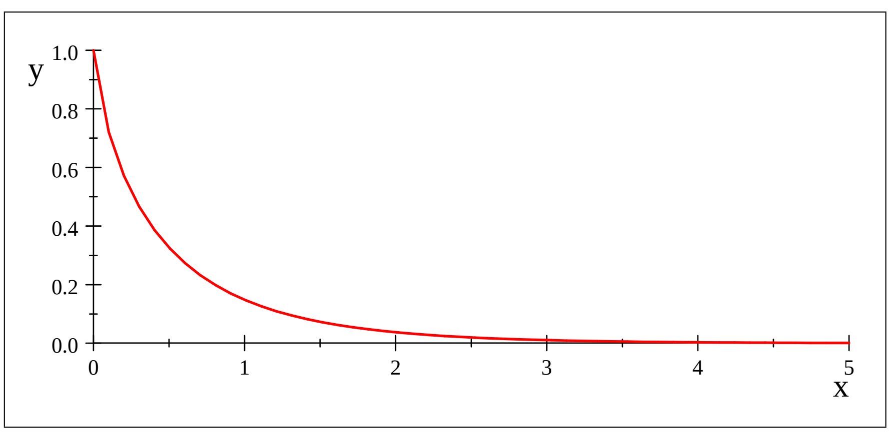
$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F^{(k)}(x) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{t}\right)^k e^{-\frac{x}{t}}dt.$$

En particulier,
$$F''(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{x}{t}}dt = \frac{1}{x}\left[e^{-\frac{x}{t}}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e^{-x}}{x}.$$

En déduire l'allure de la courbe représentative de F.

F est convexe et $F'(x) = \int_0^1 -\frac{e^{-\frac{x}{t}}}{t}dt < 0$
De plus $\forall t \in \left]0,1\right], \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{t}} = 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \left]0,1\right], \left|e^{-\frac{x}{t}}\right| \leq 1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$



Exercice 3 : Intégrale à paramètre 2

Considérons la fonction
$$f : x \to \int_0^\pi \frac{\cos(tx) - 1}{t}dt$$

Donner son domaine de définition. Étudier la continuité et la dérivabilité, étudier le signe de la dérivée et dresser un tableau de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R}, t \to \dfrac{\cos(tx) - 1}{t}$ est continue sur $]0, \pi]$. $\forall x \in \mathbb{R}$, en 0, on a $\cos(tx) = 1 - \frac{(tx)^2}{2} + o\left(t^2\right)$
Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\cos(tx) - 1}{t} = -\frac{tx^2}{2} + o(t)$$

Et du coup

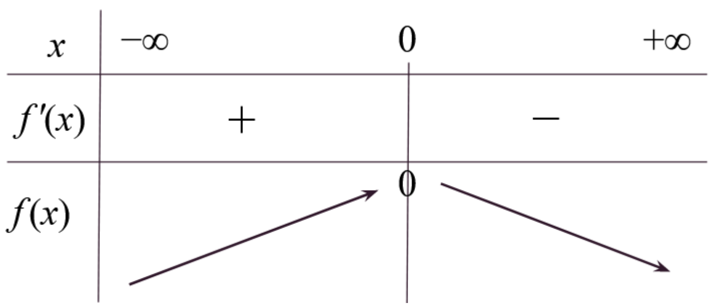
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \to 0} \frac{\cos(tx) - 1}{t} = 0$$

donc l'intégrale est propre en 0. Et f est définie sur $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, \pi], g(x,t) = \dfrac{\cos(tx) - 1}{t}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, \pi]\,]0, \pi], \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(tx)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, \pi], \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$ et $\int_0^\pi 1 dt$ est propre.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}^*, f'(x) = -\int_0^\pi \sin(tx)\, dt = \left[\frac{\cos(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\cos(\pi x) - 1}{x} \\ \text{et } f'(0) \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) - 1 \leq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.



Exercice 4 : Intégrale à paramètre 3

Considérons la fonction

$$F : x \to \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

Donner son domaine de définition.

On pose $\forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, t \to h(x,t)$ est continue donc intégrable sur $[0,1]$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'elle est dérivable sur son domaine de définition et dresser un tableau de variation de F.

$\forall t \in [0,1], x \to h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \to \dfrac{-te^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$.
Soit $a \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in [-a,a], \forall t \in [0,1], \left|\dfrac{-te^{-xt}}{1+t}\right| = \left|\dfrac{t}{1+t}\right| e^{-xt} \leq e^{-xt} \leq e^{|-xt|} \leq e^{at} \leq e^a$
Donc F est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t} dt$$

$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) < 0$ donc F est strictement décroissante.
$\forall t \in]0,1], \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t} = 0$ et $\forall x > 0, \forall t \in]0,1], \left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t}\right| \leq 1$ donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

$\forall t \in \left]0,1\right], \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{e^{-xt}}{1+t} > \dfrac{e^{-xt}}{2}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F\left(x\right) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{2}dt = \left[-\frac{1}{2x}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{-e^{-x}+1}{2x}$$

Et

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}+1}{2x} = +\infty$$

donc $\lim_{x\to-\infty} F\left(x\right) = +\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Montrer que F est solution de l'équation différentielle

$$y' - y = \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'\left(x\right) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t}dt$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall x \quad \in \quad & \mathbb{R}^*, F'\left(x\right) - F\left(x\right) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}dt \\ = \quad & -\int_0^1 \frac{\left(t+1\right)e^{-xt}}{1+t}dt = -\int_0^1 e^{-xt}dt = \left[\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=1} \\ = \quad & \frac{e^{-x}-1}{x}.\end{aligned}$$