Exercice 1

On considère un système physique dont l'espace des états, qui est à 3 dimensions, est rapporté à la base orthonormée formé par $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$. Dans la base de ces 3 vecteurs, l'opérateur **H** et l'observable **A** s'écrivent :

$$\mathbf{H} = \hbar\,\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ω_0 et a sont des constantes réelles positives.

Le système se trouve à t = 0 dans l'état : $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$

1°) On mesure à l'instant t=0 l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

2°) Calculer pour le système dans l'état $|\Psi_0\rangle$, la valeur moyenne $\langle \mathbf{H} \rangle$ et l'écart quadratique moyen $\Delta\mathbf{H}$.

3°) Au lieu de mesurer **H** à l'instant t = 0, on mesure **A**, quels résultats peut-on trouver et avec quelle probabilité. Quelle le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

4°) Calculer le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ du système à l'instant t.

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

- $\tilde{H} \rightarrow \boxed{|\Psi(0)\rangle} \rightarrow E_n$

appareil de mesure — système — résultats de mesure

H est diagonal => les éléments de diagonaux => Val. propres.

Résultats $= \{\hbar\omega_0, 2\hbar\omega, 2\hbar\omega\} = \{\hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0\}$

2 fois dégénéré

$$H = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{array}$$

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} |u_1\rangle \\ |u_2\rangle \\ |u_3\rangle \end{array}$$

$H|u_1\rangle = \hbar\omega_0|u_1\rangle$ $\qquad (A|\lambda\rangle = a|\lambda\rangle)$

$H|u_2\rangle = 2\hbar\omega_0|u_2\rangle$

$H|u_3\rangle = 2\hbar\omega|u_3\rangle$

$2\hbar\omega \rightarrow |u_2\rangle, |u_3\rangle$ 2 fois dégénéré.

$P(E_1 = \hbar\omega_0) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 \qquad (t=0)$

$\langle u_1|\psi(0)\rangle = \langle u_1| \{ \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle \}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_1|u_1\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle u_1|u_2\rangle}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle u_1|u_3\rangle}_{0}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\| P(E_1) = \frac{1}{2} \|$

- $P(E_2 = 2\hbar\omega_0) = \sum_{i=2,3} |\langle u_i|\psi\rangle|^2$

$= |\langle u_2|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\| \underline{P(E_2)} = 1/2 \|$$

2) $\langle H \rangle_{|\psi_0\rangle} = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle$

$$= \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = c_1 |u_1\rangle + c_2 |u_2\rangle + c_3 |u_3\rangle \qquad (c_1 c_2 c_3 \in \mathbb{C}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle \psi | = \left(c_1^* \; c_2^* \; c_3^* \right)$$

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; 1 \; 1 \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \hbar\omega_0 .$$

* ecart quadratique :

$$\Delta H^2 = \langle H^2 \rangle - \underline{\langle H \rangle}^2 \qquad H^2$$

$$\underline{\langle H^2 \rangle} = (\hbar\omega)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{2} (\hbar\omega)^2$$

$$\Delta H = \sqrt{\frac{5}{2}(\hbar\omega)^2 - \frac{9}{4}(\hbar\omega)^2} = \hbar\omega \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

3) A :

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}_{3,3}) = 0 \qquad \mathbb{1}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a - \lambda} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} \\ 0 & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a - \lambda)(\lambda^2 - a^2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_+ = a & \text{: valeur propre double} \\ \lambda_- = -a & \text{: valeur propre simple.} \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} |u_1\rangle \\ |u_2\rangle \\ |u_3\rangle \end{array}$$

$A |u_1\rangle = a |u_1\rangle$: a: val propre de A $\Rightarrow |u_1\rangle$

on travaille avec $\bar{A}$ ds le sous espace $\{|u_2\rangle |u_3\rangle\}$.

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\bar{A} - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\bar{A}-\lambda)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - a^2 = 0$$

$$\lambda = \pm a$$

• $|u_1\rangle$: est un vecteur propre de $A \rightarrow \{+a\}$.

soit $|\lambda_+\rangle = \alpha|u_2\rangle + \beta|u_3\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\bar{A}\,|\lambda_+\rangle = a\,|\lambda_+\rangle$$

$$\cancel{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cancel{a}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\boxed{\beta = \alpha}$ $\qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$|\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1/\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\varphi} \qquad (\varphi = 0)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle .$$

• $|\lambda_-\rangle \sim -a$: $\qquad \bar{A}\,|\lambda_-\rangle = -a\,|\lambda_-\rangle$.

$$|\lambda_-\rangle = \alpha'|u_2\rangle + \beta'|u_3\rangle$$

CN. $\qquad |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$

$$\cancel{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = -\cancel{a}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

$$\beta' = -\alpha'$$

CN. $\qquad |\beta'|^2 + |\alpha'|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}$

$$|\lambda_-\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

* Résultats possibles : $\{+a, -a\}$.

$$+a \begin{cases} |u_1\rangle \\ |\lambda_+\rangle \end{cases}$$

$$P(+a) = |\langle u_1|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle\lambda_+|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle\lambda_+|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(-a) = |\langle\lambda_-|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\langle\lambda_-|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$$

Récap : $\quad P(+a) = 1$. sûre.

Récap. $\begin{cases} P(+a) = 1 \text{ sûre.} \\ P(-a) = 0. \end{cases}$

$$A \longrightarrow \boxed{|\psi(0)\rangle} \longrightarrow (+a) \longrightarrow \boxed{|\psi'\rangle}$$

$$\begin{cases} |\lambda_+\rangle \\ |v_1\rangle \end{cases}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{\mathbb{P}_n |\psi(0)\rangle}{\| \mathbb{P}_n |\psi(0)\rangle \|}$$

$$\mathbb{P}_n = |\lambda_+\rangle\langle\lambda_+| + |v_1\rangle\langle v_1|$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_n |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{4} + 1/4 \\ \frac{1}{4} + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = |\psi(0)\rangle$$

$$\| \mathbb{P}_n |\psi(0)\rangle \| = \| |\psi(0)\rangle \| = 1.$$

$$|\psi'\rangle = |\psi(0)\rangle$$

4) $|\psi(t)\rangle$ tq.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \, |\psi(0)\rangle.$$

$$= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} |v_1\rangle + \frac{1}{2} |v_2\rangle + \frac{1}{2} |v_3\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |v_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |v_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |v_3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\cancel{\hbar}\omega t/\cancel{\hbar}} |v_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-i 2\cancel{\hbar}\omega t/\cancel{\hbar}} |v_2\rangle$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i 2\cancel{\hbar}\omega t/\cancel{\hbar}} |v_3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} |v_1\rangle + \frac{1}{2} e^{2i\omega t} |v_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-2i\omega t} |v_3\rangle \}$$

Exercice 2

Un système physique est de dimension deux dans l'espace des états, dont on choisit une base {| φ₁>,| φ₂>}, la matrice représentant l'Hamiltonien **H** du système dans cette base s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A_1 & W \\ W & A_2 \end{pmatrix}$$

1°) Expliquer pourquoi A_l, A_2 et W ne peuvent pas être des nombres complexes.

2°) Sachant que $A_l = A_2 = 0$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres normés correspondants $|v_1>$, $|v_2>$, de **H**.

b) L'état du système à l'instant t = 0 est $|\Psi(0)> = |\varphi_1>$

i- Ecrire $|\varphi_1>$ et $|\varphi_2>$ en fonction de $|v_1>$ et $|v_2>$.

j- Calculer la probabilité Pr de trouver le système dans l'état $|\varphi_2>$.

1) H est observable $\Rightarrow$ H est hermitique

$\Rightarrow H = H^{\dagger}$

$$\begin{pmatrix} A_1 & W \\ W & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^* & W^* \\ W^* & A_2^* \end{pmatrix}$$

" $z = z^*$ $\Rightarrow z \in \mathbb{R}$ "

2)

$$H = \begin{array}{cc} |\varphi_1\rangle & |\varphi_2\rangle \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}$$

Valeur :

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}_{2}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & W \\ W & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - W^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \{\pm W\}$$

Soit : $\begin{cases} |\lambda_+\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle & \rightsquigarrow +W \\ |\lambda_-\rangle = \alpha'|\varphi_1\rangle + \beta'|\varphi_2\rangle & \rightsquigarrow -W \end{cases}$

$$\begin{cases} H|\lambda_+\rangle = w|\lambda_+\rangle \\ H|\lambda_-\rangle = -w|\lambda_-\rangle \end{cases}$$

$$\cancel{w}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cancel{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta = \alpha} \quad \text{et} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\Rightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$|\lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle.$$

- $$\cancel{w}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = -\cancel{w}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta' = -\alpha'} \quad \text{et} \quad |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$$

$$|\alpha'| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(|\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle. \right)$$

- $t = 0$: $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$.

$$\begin{cases} |\lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle. & (1) \\ |\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow |\lambda_+\rangle + |\lambda_-\rangle = \sqrt{2}|\varphi_1\rangle$

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\lambda_+\rangle + |\lambda_-\rangle\}. \\ |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_+\rangle - |\lambda_-\rangle) \end{cases}$$

$(1)-(2)$

$$P(|\varphi_2\rangle) = |\langle\varphi_2|\psi(0)\rangle|^2 = 0. \qquad \boxed{\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle = 0}$$

- $|\psi(t)\rangle$: t qlq.

• $|\psi(t)\rangle$: tq|q :

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)\rangle .$$

$$= \exp\left(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)|\varphi_1\rangle$$

$$= \exp\left(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}|\lambda_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\lambda_-\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\lambda_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)|\lambda_-\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t/\hbar}|\lambda_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\omega t/\hbar}|\lambda_-\rangle$$

$V(x)$ ∞

Exercice 3

On considère une particule de masse m, dans un puits de potentiel infini.

$V(x) = 0$ $\quad 0 < x < a$

$V(x) = +\infty$ $\quad$ partout ailleurs.

1°) La fonction d'onde à l'extérieur du puits est nulle, expliquer pourquoi ?

2°) Trouver les fonctions d'onde normées $\varphi_n(x)$ des états propres $|\varphi_n>$ et les valeurs propres E_n de l'hamiltonien **H** du système.

3°) L'état de la particule à l'instant t = 0 est :

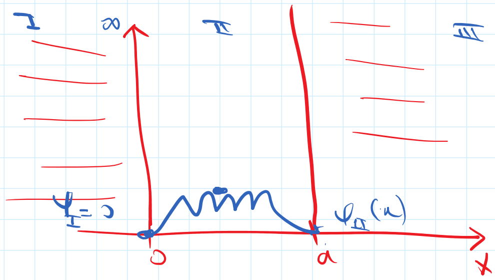
$$|\Psi(0)> = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle + a_3|\varphi_3\rangle + a_4|\varphi_4\rangle$$

a) Quelle est la probabilité, lorsqu'on mesure l'énergie de la particule dans l'état $|\Psi(0)\rangle$, de trouver une valeur inférieur à ($\frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$) ?

b) Déterminer la valeur moyenne de l'énergie de la particule dans l'état $|\Psi(0)\rangle$

c) Lors d'une mesure de l'énergie, on trouve le résultat ($\frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$), quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure.

Ex 3 :



$$\begin{cases} \varphi_I(x) = 0 \\ \varphi_{III}(x) = 0 \end{cases}$$ car la proba. de trouver la particule dans la région I et III est nulle.

$$P_{I,III} \propto |\varphi|^2_{I,III}$$

2) E.S.S :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{II}(x) = E \varphi(x)$$

$$\varphi''_{II}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \cdot \varphi_{II}(x) = 0$$

$$\varphi''_{II}(x) + k^2_{II} \varphi_{II}(x) = 0 \qquad k_{II} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\varphi_{II}(x) = A e^{ik_{II}x} + B e^{-ik_{II}x} = 2iA \cdot \sin(k_n x)$$

Continuité :

$$\begin{cases} \varphi_{II}(0) = \varphi_I(0) = 0 \\ \varphi_{II}(a) = \varphi_{III}(a) = 0 \end{cases}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow \| A = -B \|$$

$$A e^{ika} + \underline{B} e^{-ika} = 0$$

$$\cancel{A} \left(e^{ika} - e^{-ika} \right) = 0$$

$$2i \sin(ka) = 0$$

$$\sin(ka) = 0$$

$$k_n a = n\pi \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\| k = n\pi \|$$

$$ka_n = n\pi \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\| k_n = \frac{n\pi}{a} \|$$

$$\frac{2m E_n}{\hbar^2} = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

$$\| E_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \times \frac{\hbar^2}{2m} \|$$

. energie est quantifiée $\| E_n = E_0 \cdot n^2 \|$

$$\| \quad \Phi_{II}(x) = 2iA \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) = N \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$\text{"} \int_0^a |\varphi_{II}|^2 \, dx = 1 \text{"} \Rightarrow |N| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\| \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \|$$

$t=0$: $\quad |\psi(0)\rangle = a_1 |\Phi_1\rangle + a_2 |\Phi_2\rangle + a_3 |\Phi_3\rangle + a_4 |\Phi_4\rangle$

$E_n = E_0 \cdot n^2$

- $E_1 = E_0 \longrightarrow |\varphi_1\rangle$
- $E_2 = 4 E_0$
- $E_3 = 9 E_0$
- $E_4 = 16 E_0$

$\longrightarrow$ résultats possibles

$$P(E_1) = |\langle \varphi_1 | \psi(0)\rangle|^2 = |a_1|^2$$

$$P(E_2) = |\langle \varphi_2 | \psi(0)\rangle|^2 = |a_2|^2$$

$\vdots$

$$\langle H \rangle_{|\psi(0)\rangle} = \langle \psi(0) | \underset{\sim}{H} | \psi(0)\rangle$$

$$H|\psi(0)\rangle = H a_1 |\varphi_1\rangle + H a_2 |\varphi_2\rangle + H a_3 |\varphi_3\rangle + H a_4 |\varphi_4\rangle$$

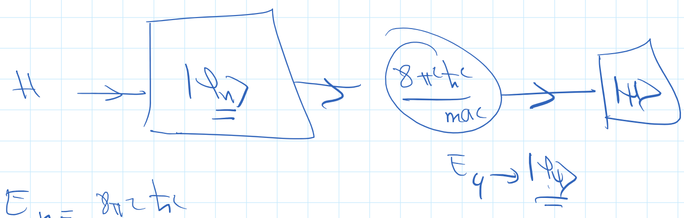
$$H|\psi(0)\rangle = a_1 E_1 |\varphi_1\rangle + a_2 E_2 |\varphi_2\rangle + a_3 E_3 |\varphi_3\rangle$$

$+ a_4 E_4 |\varphi_4\rangle$.

$$H|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} a_1 E_1 \\ a_2 E_2 \\ a_3 E_3 \\ a_4 E_4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle}} = \begin{pmatrix} a_1^* & \underline{a_2^*} & a_3^* & a_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 E_1 \\ a_2 E_2 \\ a_3 E_3 \\ a_4 E_n \end{pmatrix}$$

$$\langle H\rangle = |a_1|^2 E_1 + |a_2|^2 E_2 + |a_3|^2 E_3 + |a_4|^2 E_4$$



$$\begin{cases} E_n = \dfrac{8\pi^2\hbar c}{ma^2} \\ \quad \parallel \\ E_n = 4 \end{cases} \qquad ||n=4|| \to |\varphi_4\rangle.$$

$$H|\varphi_4\rangle = E_4|\varphi_4\rangle.$$

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n|\psi(0)\rangle}{||P_n|\psi(0)\rangle||} = \frac{|\varphi_4\rangle\overbrace{\langle\varphi_4|\psi(0)\rangle}^{a_4}}{||P_4|\psi(0)\rangle||}$$

$$= \frac{a_4 \cdot |\varphi_4\rangle}{||a_4|\varphi_4\rangle||} = |\varphi_4\rangle.$$

$|\psi'\rangle = |\varphi_4\rangle$: état après la mesure.

Exercice 4

Soit **L** un opérateur qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{L} = \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{d}{d\theta}\right) \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1°) On appelle m la valeur propre, réelle de cet opérateur et ϕ_m la fonction propre correspondante.

a) Trouver la forme des fonctions propres normées.

b) Quelle propriété doit vérifier m sachant que ϕ_m doit avoir la même valeur pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$.

2°) L'état du système est décrit par une fonction d'onde $\Psi = A\cos^2\theta$. Trouver la valeur de A pour que Ψ soit normée.

3°) Exprimer Ψ en fonction des fonctions propres ϕ_m.

4°) Quelles sont les valeurs possibles de m.

5°) Quelle est la probabilité, Pr(m), de trouver chaque valeur de m.

6°) Calculer la valeur moyenne $< \mathbf{L} >$ dans l'état Ψ.

1°) $\tilde{L} = \frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}$

$$\begin{cases} \tilde{L}\varphi_0 = 0\,\varphi_0 = 0 \\ \tilde{L}\varphi_2 = 2\,\varphi_2 \\ \tilde{L}\varphi_{-2} = -2\,\varphi_{-2} \end{cases}$$

1°) a) $\tilde{L}\varphi_m = m\,\varphi_m$.

$$\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}\varphi_m = m\,\varphi_m.$$

$$\int \frac{d\varphi_m}{\varphi_m} = \int i\,m\,d\theta.$$

$$\ln|\varphi_m| = i\,m\,\theta + k.$$

$$\varphi_m = e^{im\theta + k} = \underline{e^{k}}\cdot e^{im\theta} = C\cdot e^{im\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_m|^2\,d\theta = 1 \Rightarrow |C|^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 1$$

$$\Rightarrow |C| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\left\| \varphi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{im\theta} \right\|$$

b) $\phi_m(\theta+0) = \phi_m(\theta+2\pi)$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}} \cdot e^{i 2\pi n}.$$

$$e^{2\pi m i} = 1 \Rightarrow \cancel{2\pi} m = \cancel{2\pi} n. \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \theta = 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

m est un entier.

2) $$\int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\theta = 1 \Rightarrow |A|^2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = 1.$$

$$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2\theta)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1 + 2\cos 2\theta + \underline{\cos^2 2\theta})$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right)$$

$$|A|^2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = 1 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{4}{3\pi}}.$$

$$\psi(\theta,\varphi) = \sum_{l} C_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad \underline{e^{im\theta}}$$

$$\psi = A\cos^2\theta = \frac{A}{4} \cdot \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)^2$$

$$= \frac{A}{4} \cdot \left\{ \underline{e^{2i\theta}} + e^{-2i\theta} + 2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3\pi}} \left\{ \underline{e^{2i\theta}} + e^{-2i\theta} + 2e^{i0} \right\}$$

$2i\theta$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2i\theta} \Rightarrow e^{2i\theta} = \sqrt{2\pi}\cdot \varphi_2$$

$$e^{-2i\theta} = \sqrt{2\pi}\ \varphi_{-2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\left\{\sqrt{2\pi}\,\varphi_2 + \sqrt{2\pi}\,\varphi_{-2} + 2\sqrt{2\pi}\,\varphi_0\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\left\{\varphi_2 + \varphi_{-2} + 2\varphi_0\right\}.$$

$$\| \varphi = \sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\varphi_2 + \frac{1}{4}\varphi_{-2}\right). \|$$

$$\| m = \{0, -2, +2\} \|$$

1) Probabilité :

$$Pr(m=0) = |\langle\varphi_0|\psi\rangle|^2$$

$$Pr(m=-2) = |\langle\varphi_{-2}|\psi\rangle|^2$$

$$Pr(m=+2) = |\langle\varphi_{+2}|\psi\rangle|^2$$

$$\langle\psi|L|\psi\rangle = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\langle\varphi_0| + \frac{1}{4}\langle\varphi_2| + \frac{1}{4}\langle\varphi_{-2}|\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\hat{L}|\varphi_0\rangle + \frac{1}{4}\hat{L}|\varphi_2\rangle + \frac{1}{4}L|\varphi_{-2}\rangle\right)$$

$$\underset{0}{\parallel} \qquad \frac{1}{4}2|\varphi_2\rangle - \frac{2}{4}|\varphi_{-2}\rangle$$

$$= \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\| \langle\psi|L|\psi\rangle = 0 \|$$