Intégrales généralisées
Fiche du cours :

Intégration des fonctions rationnelles

Définition 0.1

Une fraction (ou fonction) rationnelle est une fonction $f(x)$, quotient de deux fonctions polynômes:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_p x^p+\alpha_{p-1}x^{p-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_q x^q+\beta_{q-1}x^{q-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}$$

où

- les coefficients α_i et β_j seront des constantes réelles.
- les degrés de $P(x)=p$ et de $Q(x)=q$ sont des nombre entiers positifs ou nuls ($\alpha_p\geq 0$ et $\beta_q\geq 0$).

Exemple 0.1

Fractions rationnelles

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=4x^3-x+7\\
f_2(x)&=\frac{1}{x^3+1}\\
f_3(x)&=\frac{x^4+2}{x^3+1}\\
f_4(x)&=\frac{x+3}{(x-1)^4\left(x^2-2x+3\right)^3}
\end{aligned}$$

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur R.

La forme la plus générale, de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $f(x)$, dans $\mathbb{R}$, est donnée par :

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{r_i}\frac{A_{i,\lambda}}{(x-a_i)^\lambda}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{s_k}\frac{B_{k,\mu}x+C_{k\mu\mu}}{\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]^\mu}$$

où

- n et $m\in\mathbb{N}$
- $r_1,\ldots,r_n;s_1,\ldots,s_m\in\mathbb{N}^*$
- $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ deux à deux distincts
- $(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_m,\beta_m)\in\mathbb{R}^2$ deux à deux distincts : $[x-(\alpha_k+j\beta_k)]\,[x-(\alpha_k-j\beta_k)]=\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]$
  avec :
- $E(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ appelée partie entière ou polynôme quotient de $P(x)$ par $Q(x)$ pour la division euclidienne ($E(x)$ existe si degré de $P(x)\geq$ degré de $Q(x)$).

- $\sum_{\lambda=1}^{r_i} \frac{A_{i,\lambda}}{(x-a_i)^2} = \frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,r_i}}{(x-a_i)^{r_i}}$ appelée somme d'éléments simples de 1ère espèce, relative au pôle réel a_i, d'ordre r_i.
- $\sum_{\mu=1}^{s_k} \frac{B_{k,\mu}x+C_{k,\mu}}{\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]^\mu} = \frac{B_{k,1}x+C_{k,1}}{\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]} + \frac{B_{k,2}x+C_{k,2}}{\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]^2} + \ldots + \frac{B_{k,S_k}x+C_{k,S_k}}{\left[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]^{s_k}}$ appelée somme d'éléments simples de 2ème espèce, relative au couple de pôles complexes conjugués $\alpha_i \pm j\beta_k$, d'ordre s_k.

Exemple 0.2: Décomposition de fraction rationnelles

$$f_5(x) = \frac{x^4}{x^2-2x-8} = \frac{x^4}{(x-4)(x+2)} = x^2+2x+12+\frac{128}{3(x-4)} - \frac{8}{3(x+2)}$$

$$f_6(x) = \frac{x^5}{(x-1)\left(x^3-1\right)} = \frac{x^5}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} =$$

$$x+1+\frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x}{x^2+x+1}$$

$$f_7(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = 1+\frac{5}{x-2}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Calcul des primitives

Les primitives d'une fraction rationnelle $f(x)$ s'obtiennent par la primitivation de chacun des termes de sa décomposition.

- Primitivation de la partie entière $E(x)$ Les primitives d'un polynôme de degré n sont des polynômes de degré $(n+1)$:

$$\int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

Exemple 0.3: Primitive d'une partie entière

La décomposition en éléments simple de

$$f_5(x) = \frac{x^4}{(x-4)(x+2)} = x^2+2x+12+\frac{128}{3(x-4)} - \frac{8}{3(x+2)}$$

admet pour partie entière $E(x) = x^2+2x+12$, d'où par intégration

$$\int E(x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 12x + C$$

Primitivation des éléments simples de 1ère espèce $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$

Le pôle a est un réel fixé, $A \in \mathbb{R}$ et n entier ≥ 1

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \text{si } n=1 & \int \frac{Adx}{(x-a)} = A\ln|x-a| + C \text{ pour } x \neq a \\ \text{si } n>1 & \int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \text{ pour } x \neq a \end{cases}$$

Primitive des éléments simples de 1 ère espèce

La décomposition en éléments simples de

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{x^5}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} \\ &= x+1+\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

admet pour éléments simples de lère espèce $\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2}$.

Par intégration nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-1} &= \frac{4}{3}\ln|x-1|+C_1 \\ \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+C_2 \end{aligned}$$

Primitivation des éléments simples de 2ème espèce $\int\frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx$

où α, β, B et C sont des constantes réelles et m entier ≥ 1. Utilisons le changement de variable:

$$t=\frac{x-\alpha}{\beta} \Leftrightarrow x=\alpha+\beta t \text{ donc } dx=\beta dt$$

l'élément différentiel devient :

$$\begin{aligned} \frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}dx &= \frac{B(\alpha+\beta t)+C}{(1+t^2)^m}\frac{dt}{\beta^{2m-1}} \\ &= \frac{B}{\beta^{2m-2}}\frac{tdt}{(1+t^2)^m}+\frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\frac{dt}{(1+t^2)^m} \end{aligned}$$

Ce changement de variable nous conduit au calcul des primitives:

$$I_m=\int\frac{tdt}{(1+t^2)^m} \text{ et } J_m=\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}$$

Exemple 0.4: Calcul de Im

Calcul de $I_m=\int\frac{tdt}{(1+t^2)^m}$

- si $m=1$

$$I_1=\int\frac{tdt}{(1+t^2)}=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C$$

- si $m>1$

$$I_m=\int\frac{tdt}{(1+t^2)^m}$$

Posons $u=1+t^2$ d'où $du=2tdt$, et

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^m}=\frac{1}{2(1-m)}\frac{1}{u^{m-1}}+C \\ I_m &= \frac{1}{2(1-m)}\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}+C \end{aligned}$$

Exemple 0.5: Calcul de Jm

Calcul de $J_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$

- Si $m = 1$

$$J_1 = \int \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan t + C$$

- Si $m > 1$ Chercher une formule de récurrence, ramenant le calcul de J_m à celui de J_{m-1} supposé effectué jusqu'à J_1 connu. Partons de $J_{m-1} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$ et intégrons par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(1+t^2)^{m-1}} & dv = dt \\ du = \frac{2(1-m)t}{(1+t^2)^m} dt & v = t \end{array}$$

d'où $J_{m-1} = \frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} + 2(m-1) \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^m}$ puisque $\frac{t^2}{(1+t^2)^m} = \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{(1+t^2)^m}$ nous avons : $J_{m-1} = \frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} + 2(m-1)\left(J_{m-1} - J_m\right)$
d'où la formule de récurrence, pour m entier > 1 :

$$J_m = \frac{2m-3}{2m-2} J_{m-1} + \frac{1}{2m-2} \frac{t}{(1+t^2)^{m-1}}$$

Sachant que $J_1 = \arctan t + C$ calculons :

$$J_2 = \frac{2 \times 2 - 3}{2 \times 2 - 2} J_1 + \frac{1}{2 \times 2 - 2} \frac{t}{(1+t^2)^{2-1}} + C$$
$$J_2 = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{(1+t^2)} + C$$

On trouvera

$$J_3 = \frac{3}{4} J_2 + \frac{1}{4} \frac{t}{(1+t^2)^2} + C$$
$$J_3 = \frac{3}{8} \arctan t + \frac{3}{8} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{4} \frac{t}{(1+t^2)^2} + C$$

etc $\cdots$

Calcul des intégrales

On peut calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle irréductible $f(x) = P(x)/Q(x)$ sur tout intervalle fermé $[a, b]$ à condition que $\forall x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow Q(x_0) \neq 0$. Les méthodes d'intégration sont semblables à celles de la recherche des primitives.

Primitive des éléments simples de 2 ème espèce

La décomposition en éléments simples de :

$$f_8(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

admet pour éléments simples de 2ème espèce (au signe près)

$$+\frac{x+1}{x^2+x+1} \text{ et } + \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

Par intégration nous obtenons pour :

$$+\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

or $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left(x^2+x+1\right) + C_1$

et $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_2$

d'où $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

or $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = -\frac{1}{(x^2+x+1)} + C_3$

et $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2} = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int \frac{du}{(1+u^2)^2}$

Avec $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ et $du = \frac{2dx}{\sqrt{3}}$

En écrivant $\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int \frac{(1+u^2)-u^2}{(1+u^2)^2}du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du$

or $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C_4$

et $\int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du = \int \frac{u \cdot udu}{(1+u^2)^2}$ qui s'intègre par parties En posant

$$w = u \quad dv = \frac{udu}{(1+u^2)^2}$$

$$dw = du \quad v = -\frac{1}{2\left(1+u^2\right)}$$

Alors : $\int \frac{u.udu}{(1+u^2)^2} = -\frac{u}{2(1+u^2)} + \int \frac{du}{2(1+u^2)}$

$$= -\frac{u}{2\left(1+u^2\right)} + \frac{1}{2}\arctan(u) + C_5$$

d'où $\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u^2du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{u}{2(1+u^2)} + C$

Soit $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right] + C$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$$

donc :

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = -\frac{1}{2\left(x^2+x+1\right)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$$

Exemple 0.6: Intégration d'une fonction rationnelle

Calcul de $I = \int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2+2x+5} dx$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2(x-1)}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(2x+2)-4}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx - 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5} \end{aligned}$$

or $\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx = \ln|x^2+2x+5| + C_1$

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{2+1}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C_2 \\ &\text{d'où } I = \left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| - \arctan\frac{x+1}{2}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad = \left[\frac{1}{2}\ln 8 - \arctan 1\right] - \left[\frac{1}{2}\ln 4 - \arctan 0\right] \\ &\quad I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Intégration des fonctions trigonométriques

Primitivation des fonctions polynômes en $\sin x, \cos x$.

Forme 0.1

Forme : $I=\int P(\sin x, \cos x) dx=\int \sin^p x \cos^q x dx (p, q \in \mathbb{N})$

- si p est impair, on peut poser $u=\cos x$
- si q est impair, on peut poser $u=\sin x$
- si p et q sont impairs, on peut poser $u=\sin x$ ou $u=\cos x$ ou $u=\cos 2x$
- si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver.

Exemple 0.7

$$I_1=\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$I_1=\int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx=\int\left(1-\cos^2 x\right) \cos^2 x \sin x dx$$

Posons $u=\cos x \Leftrightarrow du=-\sin x dx$

d'où $I_1=-\int\left(1-u^2\right) u^2 du=-\int\left(u^2-u^4\right) du=-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C I_1=-\frac{1}{3} \cos^3 x+\frac{1}{5} \cos^5 x+C$

Exemple 0.8

$$I_2=\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$I_2=\int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx=\int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right) \cos x dx$$

Posons $u=\sin x \Leftrightarrow du=\cos x dx$

d'où $I_2=\int u^2\left(1-u^2\right) du=\int\left(u^2-u^4\right) du=\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C$

$$I_2=\frac{1}{3} \sin^3 x-\frac{1}{5} \sin^5 x+C$$

Exemple 0.9

$$I_3=\int \sin^3 x \cos x dx$$

$$I_3=\int \sin^2 x \sin x \cos x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

Posons $u=\cos 2x \Leftrightarrow du=-2 \sin 2x dx$ d'où

$$I_3=-\frac{1}{8} \int(1-u) du=-\frac{1}{8}\left(u-\frac{u^2}{2}\right)+C I_3=-\frac{1}{8}\left(\cos^2 2x-\frac{1}{2} \cos^2 x\right)+C$$

Exemple 0.10

$$I_4=\int \sin^2 x\cos^2 x dx=\int \sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$$
$$=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left[\int dx-\int \cos 4x dx\right]$$
$$\text{d'où : } I_4=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Forme 0.2

Forme : $I=\int \sin px\cos qx dx$; $J=\int \sin px\sin qx dx$; $K=\int \cos px\cos qx dx (p,q\in\mathbb{R})$

Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin p\cos q=\frac{1}{2}[\sin(p+q)+\sin(p-q)]$
- $\sin p\sin q=\frac{1}{2}[\cos(p-q)-\cos(p+q)]$
- $\cos p\cos q=\frac{1}{2}[\cos(p+q)+\cos(p-q)]$

$$I_5=\int \sin 2x\cos 3x dx$$

$$\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}[\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)]=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$$
$$\text{d'où } I_5=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C$$

$$I_6=\int \sin 3x\sin 2x dx$$

$$\sin 3x\sin 2x=\frac{1}{2}[\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)]=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)$$
$$\text{d'où } I_6=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 5x)dx=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x+C$$

$$I_7=\int \cos 3x\cos 4x dx$$

$$\cos 3x\cos 4x=\frac{1}{2}[\cos(3x+4x)+\cos(3x-4x)]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)$$

d'où $I_7=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{14}\sin 7x+C$

Primitivation des fractions rationnelles en $\sin x,\cos x$

Forme 0.3

Forme : $I=\int F(\sin x,\cos x)dx$

Par changement de variable, on se ramène à la recherche de primitives d'une fraction rationnelle d'une variable t.

Méthode générale

Poser $t=\tan\frac{x}{2}$ (pour $t\in\mathbb{R}$ et $-\pi<x<\pi$) $\Leftrightarrow x=2\arctan t dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ sachant que $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ Nous obtenons $I=\int F(\sin x,\cos x)dx=\int F\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ qui est une fraction rationnelle en t (dont la primitivation demande souvent de longs calculs).

$$I_8=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx(x\neq(2k+1)\pi)\quad k\in\mathbb{Z}$$

Posons $t=\tan(x/2)$ d'où

$$x=2\arctan t\Leftrightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

avec $\sin t=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et

$$\begin{aligned}I_8&=\int\frac{2t}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt\\&=\int\frac{2t}{1+t^2}dt=\ln\left(1+t^2\right)+C\\I_8&=\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C_1\,(\text{avec }C_1=C+\ln 2)\end{aligned}$$

Autres expressions :

$$1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\Rightarrow I_8=-\ln\cos^2\frac{x}{2}+C$$
$$\text{ou } I_8=-\ln\frac{|1+\cos x|}{2}+C\text{ ou } I_8=-\ln|1+\cos x|+C$$

Règle 0.1: Règle de Bioch

Posons $\omega(x)=F(\sin x,\cos x)$ dx l'élément différentiel.

- Si $\omega(-x)=\omega(x)$ alors $\int F(\sin x,\cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t=\cos x$
- Si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$ alors $\int F(\sin x,\cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t=\sin x$
- Si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$ alors $\int F(\sin x,\cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t=\tan x$

Cette méthode est à privilégier car elle simplifie "bien souvent" les calculs.

$$I_8=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx\ (x\neq(2k+1)\pi)k\in\mathbb{Z}$$

Posons $\omega(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ l'élément différentiel.

Comme $\omega(-x)=\frac{\sin(-x)d(-x)}{1+\cos(-x)}=\frac{\sin x dx}{1+\cos x}=\omega(x)$ Posons $t=\cos x$ d'où $dt=-\sin x dx$ alors :

$$\begin{aligned}I_8&=\int-\frac{dt}{1+t}=-\ln|1+t|+C\\I_8&=-\ln|1+\cos x|+C\end{aligned}$$

$$I_9=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+1}dx\quad\left(x\neq\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)k\in\mathbb{Z}$$

Posons $\omega(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+1}dx$ l'élément différentiel.

Comme

$$\begin{aligned}\omega(\pi-x)&=\frac{\sin(\pi-x)\cos(\pi-x)d(\pi-x)}{\sin(\pi-x)+1}\\&=\frac{\sin x(-\cos x)d(-x)}{\sin x+1}=\omega(x)\end{aligned}$$

Posons $t=\sin x$ d'où $dt=\cos x dx$ alors:

$$\begin{aligned}I_9&=\int\frac{t}{t+1}dt=\int\frac{t+1-1}{t+1}dt\\&=\int dt-\int\frac{dt}{t+1}\\&=t-\ln|t+1|+C\\&\text{d'où } I_9=\sin x-\ln(1+\sin x)+C\end{aligned}$$

$$I_{10}=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

Posons $\omega(x)=\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ l'élément différentiel.

Comme

$$\begin{aligned}\omega(\pi+x)&=\frac{d(\pi+x)}{1+\sin^2(\pi+x)}\\&=\frac{dx}{1+(-\sin x)^2}=\omega(x)\end{aligned}$$

Posons $t=\tan x$ d'où $dt=(1+\tan^2 x)\,dx=(1+t^2)\,dx$ alors:

$$\begin{aligned}I_{10}&=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left[1+\frac{t^2}{1+t^2}\right]}=\int\frac{dt}{1+2t^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t\sqrt{2}+C\\I_{10}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C\end{aligned}$$

Forme 0.4: Formes particulières

Formes $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ et $J_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}n\in\mathbb{N}^*$

- 1er cas : n est pair poser $t=\tan x$
- 2ème cas : n est impair poser $t=\tan(x/2)$

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$

– $n=2$ est pair : Posons $t=\tan x\Leftrightarrow dt=(1+\tan^2 x)\,dx=dx/\cos^2 x$ d'où $I=\int dt=t+C=\tan x+C$

$$J=\int\frac{dx}{\sin x}$$

– $n=1$ est impair : Posons $t=\tan(x/2)\Leftrightarrow x=2\arctan t$ et $dx=2dt/(1+t^2)$ Sachant que $\sin x=2t/(1+t^2)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}J&=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}\\&=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

Forme 0.5

Forme $K_n = \int \tan^n x dx, n \in \mathbb{Z}^*$

- 1er cas : n est pair poser $t = \tan x$ (si n est positif, ajouter et retrancher 1 pour faire apparaître la différentielle de $\tan x$)
- 2ème cas : n est impair poser $t = \sin x$ ou $t = \cos x$ ou $t = \tan x$ (on préférera $t = \cos x$ si $n > 0$, et $t = \sin x$ si $n < 0$)

$$K = \int \tan^2 x dx$$

– $n = 2$ est pair et positif:
Ajoutons et retranchons 1 :

$$\begin{aligned} K &= \int \left(\tan^2 x + 1 - 1\right) dx \\ &= \int \left(\tan^2 x + 1\right) dx - \int dx \\ K &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

$$L = \int \frac{1}{\tan x} dx$$

– $n = -1$ est impair et négatif. Posons $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \frac{dt}{t} = \ln |t| + C \end{aligned}$$

$$L = \ln |\tan x| + C$$

Intégration des fonctions polynômes et des fractions rationnelles en $\sin x, \cos x$.

Les méthodes d'intégration sont celles employées dans la recherche des primitives avec changement de bornes lors d'un changement de variable.

Exemple 0.11

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

Posons $x = \tan t$ d'où $t = \arctan x$ et $dt = dx / \left(1 + x^2\right)$ avec les changements de bornes :

$$\begin{aligned} t_1 &= \arctan 0 = 0 \\ t_2 &= \arctan 1 = \pi/4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \tan^2 t)\, dt}{(1 + \tan^2 t)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)} \\ &\int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi + 2}{8} \end{aligned}$$

Intégration des fonctions hyperboliques

Primitivation des fonctions polynômes en $\sinh x, \cosh x$.

Forme 0.6

Forme : $I = \int P(\sinh x, \cosh x)dx = \int \sinh^p x \sinh^q x dx (p, q \in \mathbb{N})$

- On utilise les mêmes règles de calcul que pour $P(\sin x, \cos x)$, sachant que : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- On peut utiliser le changement de variable $u = e^x$

Exemple 0.12

$$I_{12} = \int \cosh^3 x dx$$
$$I_{12} = \int \cosh^2 x \cosh x dx$$
$$= \int \left(1 + \sinh^2 x\right) \cosh x dx$$

Posons :

$$u = \sinh x \Leftrightarrow du = \cosh x dx$$

$I_{12} = \int \left(1 + u^2\right) du = u + \dfrac{u^3}{3} + C$

$I_{12} = \sinh x + \dfrac{1}{2} \sinh^3 x + C$

Exemple 0.13

$\mathrm{I}_{13} = \int \cosh^3 x dx$

Posons $u = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx = u dx$

d'où

$$I_{13} = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(e^{3x} + e^{-3x} + 3e^x + 3e^{-x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{3} + 3e^x - 3e^{-x}\right] + C$$
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} + 3\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] + C$$
$$I_{13} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sinh 3x + 3 \sinh x\right) + C$$

Primitivation des fractions rationnelles en $\sinh x, \cosh x$

Forme 0.7

Forme : $I = \int F(\sinh x, \cosh x)dx$.

Comme pour les fractions trigonométriques, par un changement de variable, on se ramène à une fraction rationnelle en t.

Méthode générale

Poser $t = \tanh \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{argtanh} t dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ sachant que $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$; $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$; $\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$

Nous obtenons $I = \int F\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}dt$ qui est une fraction rationnelle en t.

$$I_{14} = \int \frac{dx}{\cosh x}$$

Posons $t = \tanh(x/2) \Leftrightarrow x = 2\operatorname{argtanh} t$ et

$$dx = 2dt/\left(1-t^2\right)$$

Sachant que $\cosh x = (1+t^2)/(1-t^2)$, nous obtenons :

$$I_{14} = \int \frac{2dt}{(1-t^2)\frac{1+t^2}{1-t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t + C$$
$$I_{14} = 2\arctan\left(\tanh\frac{x}{2}\right) + C$$

Méthode particulière

- si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sinh x, \cosh x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \cosh x$
- si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sinh x, \cosh x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \sinh x$
- si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sinh x, \cosh x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \tanh x$

$$I_{15} = \int \frac{\cosh^3 x}{\sinh x}dx$$

Règle 0.2: Règles de Bioch

Posons $\omega(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$ pour appliquer les règles de Bioche.

Sachant que :

$$\omega(-x) = \frac{\cos^3(-x)}{\sin(-x)}d(-x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin x}d(-x) = \omega(x)$$

Effectuons dans I_{15} le changement de variable $u = \cosh x$ d'où $du = \sinh x dx$ alors :

$$
\begin{aligned}
I_{15} &= \int \frac{u^3}{u^2-1}du = \int \frac{u\left(u^2-1+1\right)}{u^2-1}du \\
&= \int udu + \int \frac{u}{u^2-1}du \\
&= \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right| + C \\
&= \frac{\cosh^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\cosh^2 x - 1\right| + C \\
I_{15} &= \frac{\cosh^2 x}{2} + \ln|\sinh x| + C
\end{aligned}
$$

Intégration des fonctions rationnelles hyperboliques Comme pour les méthodes d'intégration des fonctions trigonométriques un changement de variable nécessitera une modification des bornes d'intégration.

Exemple 0.14

$$
I_{16} = \int_0^{\frac{1}{4}\ln 3} \frac{dx}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}
$$

Sachant que $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ Posons $t = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln t$ soit $x = (\ln t)/2$ et $dx = dt/(2t)$ Les bornes d'intégration deviennent :

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0 & t_1 = e^0 = 1 \\
x_2 = \frac{1}{4}\ln 3 & t_2 = e^{\frac{1}{2}\ln 3} = \sqrt{3}
\end{array}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
I_{16} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{2t\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\right)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} \\
&= [\arctan t]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

Intégration des fonctions comprenant des radicaux

Forme 0.8

Forme $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

- si $a = 0$: poser $t = bx + c$
- si $a \neq 0$: Mettre le trinôme sous forme canonique :
  $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

1er cas : $a > 0, D < 0,$ poser $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} I_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C$ 2ème cas :

$$
I_{17} = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}
$$

Posons $t = 3x+2 \Leftrightarrow dt = 3dx$ et $I_1 = \int \frac{dt}{3\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$

$$
I_{18} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3x+5}}
$$

Forme canonique du trinôme :

$$4x^2-3x+5=4\left(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\right)=4\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{71}}{8}\right)^2\right]$$

en posant $t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}=\frac{8x-3}{\sqrt{71}}$ nous trouvons:

$$I_{18}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8x-3}{\sqrt{71}}+\sqrt{\left(\frac{8x-3}{\sqrt{71}}\right)^2+1}\right)+K$$

$$I_{18}=\frac{1}{2}\ln\left(8x-3+4\sqrt{4x^2-3x+5}\right)+C$$

$$I_{19}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$$

Forme canonique du trinôme :

$$x^2-4x=x^2-4x+4-4=(x-2)^2-2^2$$

en posant $t=\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}=\frac{2x-4}{4}$ nous trouvons:

$$I_3=\ln\left|\frac{2x-4}{4}+\sqrt{\left(\frac{2x-4}{4}\right)^2+1}\right|+K$$

$$I_3=\ln\left(\left|x-2+\sqrt{x^2-4x}\right|\right)+C$$

$$I_{20}=\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-4x^2}}$$

Forme canonique du trinôme :

$$\begin{aligned}-4x^2+2x+5&=-4\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right)\\&=-4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{21}}{4}\right)^2\right]\\&=4\left[\left(\frac{\sqrt{21}}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\right]\end{aligned}$$

en posant $t=-\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}=\frac{4x-1}{\sqrt{21}}$ nous trouvons:

$$I_4=\frac{1}{2}\arcsin\frac{4x-1}{\sqrt{2I}}+C$$

Forme $I_2=\int\frac{ax+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ si $a=0$: nous retrouvons βI_1 si $a\neq 0$: Faire apparaître au numérateur la différentielle $(2ax+b)dx$ du trinôme :

$$\alpha x+\beta=\frac{\alpha}{2a}(2ax+b)+\beta-\frac{b\alpha}{2a}=\lambda(2ax+b)+\mu(\lambda \text{ et } \mu \text{ cstes })$$

alors $I_2=\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\mu\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=2\lambda\sqrt{t}+\mu I_1+C$

$$I_{21}=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$$

Après transformation du numérateur en :

$$x+1=(2x-4)/2+3$$

nous avons:

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} \\
\text{d'où } I_5 &= \sqrt{x^2-4x+13} + 3\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+13}\right) + C \\
\text{ou } &= \sqrt{x^2-4x+13} + 3\operatorname{argsinh}\frac{x-2}{3}
\end{aligned}$$

Forme 0.9

orme $I_3 = \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

− si $a=0$: nous retrouvons I_1/β
$a \neq 0$: Poser $t = \frac{1}{\alpha x+\beta}$ d'où $x = \frac{1-\beta t}{\alpha t}$, $\frac{dx}{\alpha x+\beta} = -\frac{1}{\alpha}\frac{dt}{t}$ ce changement conduit à la forme de

$$I_1 = \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$$

$$I_{22} = \int_0^1 \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x^2+4x+1}}$$

Posons $t = \frac{1}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{4x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1-t}{4t}$ et $\frac{dt}{t} = \frac{-4dx}{4x+1}$ Après ce changement de variable, nous obtenons :

$$I_6 = -\int_1^{1/5} \frac{dt}{\sqrt{t^2+14t+1}}$$

qui en posant $u = \frac{t+7}{\sqrt{48}}$ devient

$$\begin{aligned}
I_6 &= -\frac{1}{\sqrt{48}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \\
&= -\left[\ln\mid t+7+\sqrt{t^2+14t+1}\right]\Big]_1^{1/5} \\
&= \ln\frac{15}{9+\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Forme 0.10

Forme $I_4 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Forme $I_4 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

- si $a=0$: Poser $t = bx+c$ et $I_4 = \frac{1}{b}\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3b}t^{3/2}+C$
- si $a \neq 0$: Mettre le trinôme sous la forme canonique : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta = b^2-4ac$
- 1er cas : $a>0, D<0$, poser $\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\sinh t$ pour se ramener à la forme $\int \cosh^2 t dt$ qui s'intègre après linéarisation $\left(\cosh^2 t = \frac{\cosh 2t+1}{2}\right)$. Après calcul nous trouvons :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \sqrt{ax^2+bx+cdx} \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\ln\left(ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C
\end{aligned}$$

- 2ème cas : $a > 0, D > 0$, le trinôme admet deux racines réelles, x' et x'' avec $x' < x$". pour $x < x'$, poser $\left(x+\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\cosh t$ pour $x > x$", poser $\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\cosh t$ on se ramène à la forme $\int \sinh^2 t dt$ qui s'intègre après linéarisation $\left(\sinh^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}\right)$. D'où le résultat

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C \end{aligned}$$

- 3ème cas $a < 0, D > 0$, poser $\left(x+\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\sin t$ pour se ramener à la forme $\int \cos^2 t dt$ qui s'intègre après linéarisation $\left(\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}\right)$. Finalement :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{\Delta}{8a\sqrt{-a}}\arcsin\left(-\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C \end{aligned}$$

$$I_{23} = \int \sqrt{5x+3}dx$$

Posons $t = 5x+3$ d'où $dt = 5dx$ et $I_7 = \frac{1}{5}\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{15}(5x+3)^{3/2} + C$

$$I_{24} = \int \sqrt{x^2+2x+5}dx$$

$$a = 1 > 0, D = 4 - 20 = -16 < 0$$

posons: $(x+1) = \frac{\sqrt{16}}{2}\sinh t = 2\sinh t$ Forme canonique : $x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+2^2$ d'où

$$I_8 = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) + C$$

$$I_{25} = \int \sqrt{x^2-9}dx$$

$a = 1 > 0, D = 36 > 0$

posons : $x = \pm 3\cosh t$

d'où $I_9 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right| + C$

$$I_{26} = \int \sqrt{5+2x-4x^2}dx$$

$$a = -4 < 0, D = 84 > 0$$

posons: $\left(x-\frac{1}{4}\right) = \frac{-\sqrt{84}}{-8}\sin t = \frac{\sqrt{21}}{4}\sin t$ Forme canonique :

$$-4x^2+2x+5 = -4\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right) = 4\left[\left(\frac{\sqrt{21}}{4}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

d'où

$$I_{10} = \frac{4x-1}{8}\sqrt{5+2x-4x^2} + \frac{21}{16}\arcsin\frac{4x-1}{\sqrt{21}} + C$$

Forme 0.11

Forme $I_5 = \int F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

où F est une fraction rationnelle

La forme $\int F(x, \sqrt{ax+b})dt$ appartient à cette catégorie.

$$\int F_1\left(\frac{b-dt^2}{ct^2-a}, t\right) 2\frac{ad-bc}{ct^2-a}tdt$$

$$I_{27} = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$$

posons : $t = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx = \frac{dx}{2t}$ d'où

$$I_{11} = \int_1^2 \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}2tdt = 2\int_1^2 \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) dt$$

$$= 2\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t\right]_1^2 = \frac{76}{15}$$

Forme 0.12

Forme $I_6 = \int F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

où F est une fraction rationnelle

- si $a = 0$: on obtient la forme I_5
- si $a \neq 0$: mettre le trinôme sous la forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[t^2 - k\right]$$

on obtient $\int F_1\left(t, \sqrt{a\left(t^2-k\right)}\right) dt$ où F_1 est une fraction rationnelle en t :

- 1er cas : $a > 0, k > 0$, poser $t = \sqrt{t}\cosh u$
- 2ème cas : $a > 0, k < 0$, poser $t = \sqrt{-k}\sinh u$
- 3ème cas : $a < 0, k > 0$, poser $t = \sqrt{k}\sin u$

$$I_6 = \int F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

$\mathrm{I}_{28} = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} \frac{dx}{1+x+3\sqrt{-x^2-2x}} or$-$\mathrm{x}^2 - 2x = -\left[(x+1)^2 - 1\right]$ posons : $t = x+1 \Leftrightarrow dt = dx$ d'où $I_{12} = \int_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{dt}{t+3\sqrt{1-t^2}}$ un nouveau changement de variable : $t = \sin u \Leftrightarrow u = \arcsin t$ conduit à l'intégrale :

$$I_{12} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos u}{\sin u + 3\cos u}du = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\tan u + 3}$$

or si $v = \tan u$ alors $dv = \left(1 + \tan^2 u\right) du = \left(1 + v^2\right) du$ et

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+v^2\right)(v+3)} = \frac{1}{10}\int_0^1 \left(\frac{-v+3}{1+v^2} + \frac{1}{3+v}\right) dv$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) + 3\arctan v + \ln(3+v)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{10}\left(\ln\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4}\right)$$