Exercice 6 :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

1°)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

(i) * $$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-i\omega)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

(ii) * $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-k^2)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dx$$

Résolution de l'ES.

* $V(\vec{r})$: est indépendant du temps.
* $\Psi(t,\vec{r})$ fonction d'onde

séparation des variables :

$$\underbrace{i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}}_{t} \Psi(\vec{r},t) = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})\right)}_{\vec{r}} \Psi(\vec{r},t)$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) \cdot \chi(t) \quad (i)$$

$$i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(\vec{r})\, \chi(t)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left(\varphi(\vec{r}) \cdot \chi(t)\right) + V(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) \chi(t)$$

$$i\hbar\, \varphi(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \chi(t)\, \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, \chi(t)$$

$\div\ \varphi(\vec{r})\ \chi(t)$:

$$i\hbar \cdot \frac{1}{\chi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(\vec{r})} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})$$

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{1}{\chi(t)} \dfrac{\partial}{\partial t} \chi(t) = E \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{1}{\varphi(\vec{r})} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = E \end{cases}$$

$$\int \frac{\partial \chi(t)}{\chi(t)} = -\frac{i}{\hbar} \int E\, \partial t.$$

$$\ln|\chi(t)| = -\frac{i}{\hbar} E\, t + k$$

$$\chi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et + k}$$

$$= \underset{\sim}{e^{k}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}(E.t)}$$

$$\chi(t) = k'\, e^{-i\left(\frac{E.t}{\hbar}\right)}$$

$t = 0$: $\quad \chi(t=0) = k'$

$$\boxed{\chi(t) = \underset{\sim}{\chi(0)} \,.\, \underline{e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}} \qquad \left|e^{i\alpha}\right| = 1$$

$$-\frac{2m}{\hbar^2}\;\times \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\,\underset{=}{\overset{3D}{\Delta}}\varphi(\vec{r}) + (\underline{V} - E)\,\varphi(\vec{r}) = 0 \qquad E.S.S$$

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = |\varphi(\vec{r})\;\chi(t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2\;\underset{\sim}{|\chi(t)|^2}$$

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 \propto \underset{\sim}{|\varphi(\vec{r})|^2}$$

* Cas d'un potentiel constant : $V = cte$:

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\,\varphi(x) = 0$$

1°) $E - V > 0$: (cas classique)

$$E - V = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad (E_c > 0)$$

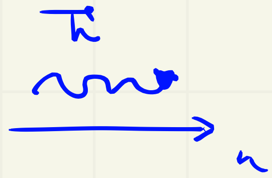
$$\frac{2m}{\hbar^2}(E - V) = k^2$$

$$\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0$$

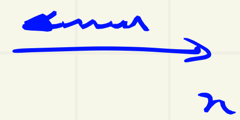
La forme des solutions :

$$\varphi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}$$
$$= A'.\cos(kx) + B'\sin(kx)$$
$$= A''\cos(kx+\varphi)$$

$e^{+i\vec{k}.\vec{r}}$: ondes planes. : e^{+ikx}



e^{-ikx}



3°) $E-V<0$: (Cas n'est pas classique $E_c<0 \Rightarrow v\in\mathbb{C}$)

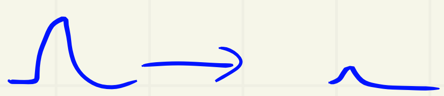
$$\frac{2m}{\hbar^2}(E-V) = -\alpha^2$$

$$\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$$

La solution est de la forme suivante :

$$\varphi(x) = A.e^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

$e^{\pm\alpha x}$ ondes évanescentes. $(x<0)$

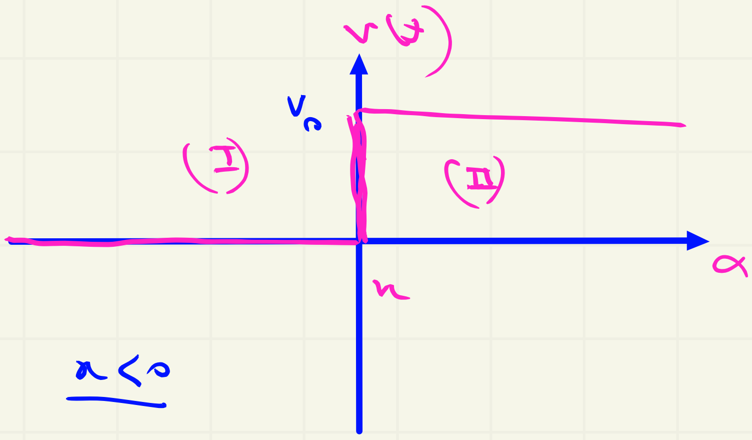


3°) Cas $E=V$: $E_c=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow p=0$

$$\varphi''=0 \Rightarrow \varphi'=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\varphi=0$$

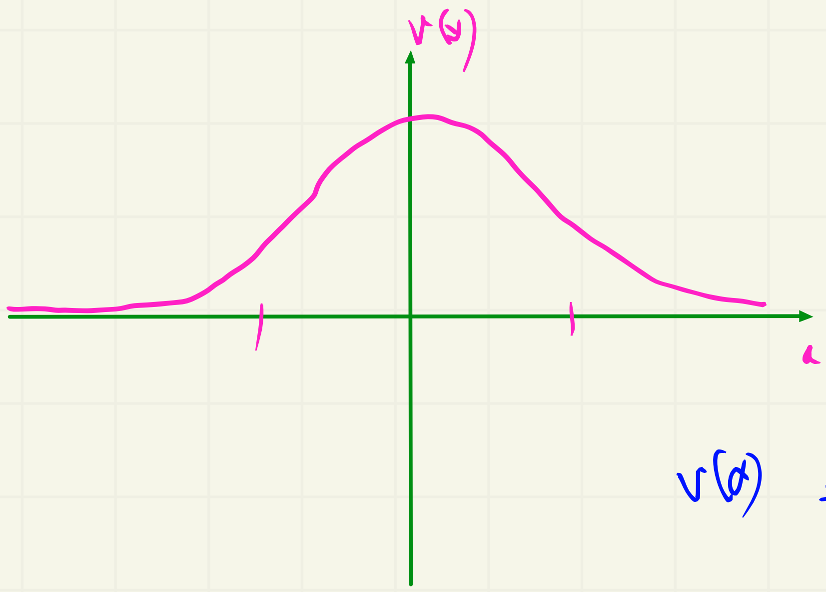
III) Potentiels carrés.

1°) Marche de potentiel.

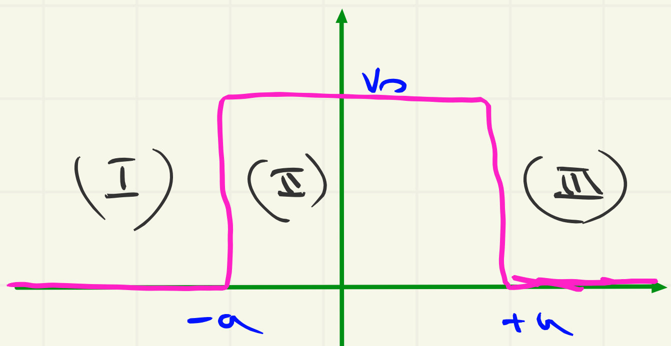


$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & x>0 \end{cases}$$

2) barrière de potentiel :

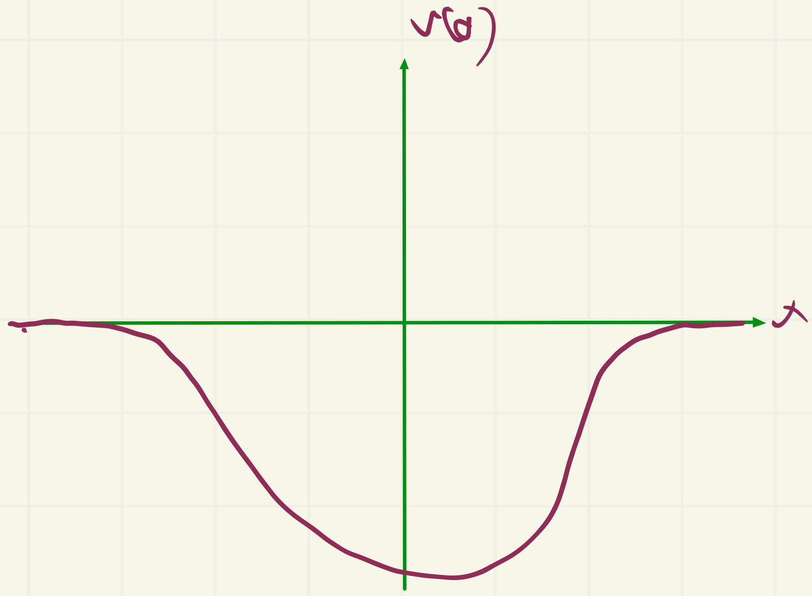


$=$

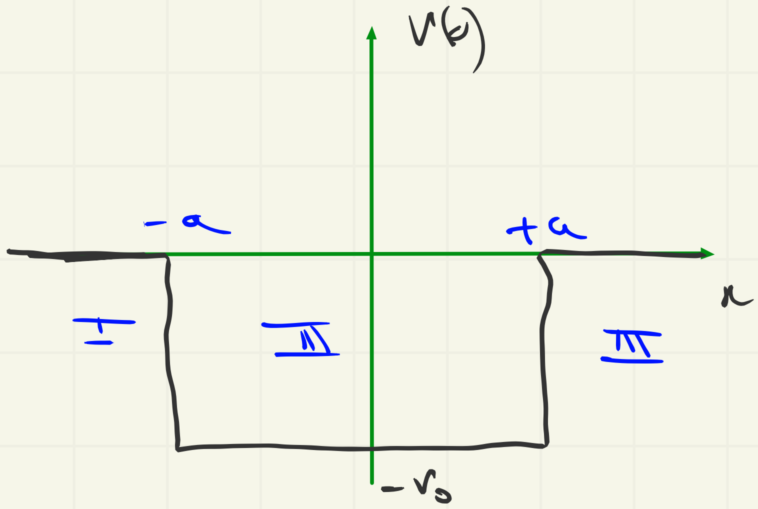


$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<-a & \text{I} \\ V_0 & -a \leq x \leq +a & \text{II} \\ 0 & x>0 & \text{III} \end{cases}$$

3°) puit de potentiel.



$=$

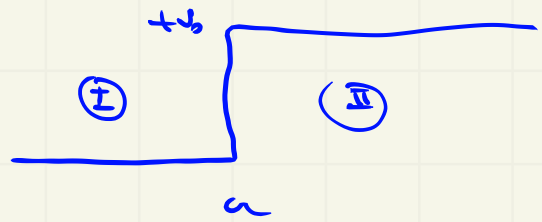


$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x<-a & \text{I} \\ -V_0 & : -a \leq x \leq +a & \text{II} \\ 0 & x>+a & \text{III} \end{cases}$$

IV) Résolution de l'E.S. d'un potentiel carré :

1er Etape : 1°) Ecrire et résoudre l'E.S. ds les # régions

Exp de la marche $V(x) = \begin{cases} V_0 & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$



Ⓘ : $\Phi_I''(x) + k_I^2 \Phi_I(x) = 0 \quad (V=0)$

$k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ (# d'onde)

$\Phi_I(x) = A e^{+ik_I x} + B e^{-ik_I x}$

Ⓘⅈ : $\Phi_{II}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\, \Phi_{II}(x) = 0 \quad V = V_0$

$(E > V_0)$: $k_{II}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\cdot(E - V_0)$ (vect. d'onde)

$\Phi_{II}''(x) + k_{II}^2 \Phi_{II}(x) = 0$

$\Phi_{II}(x) = A' e^{+ik_{II} x} + B' e^{-ik_{II} x}$

$(E < V_0)$: $\Phi_{II}(x) = A'' e^{\alpha x} + B'' e^{-\alpha x}$, $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)$

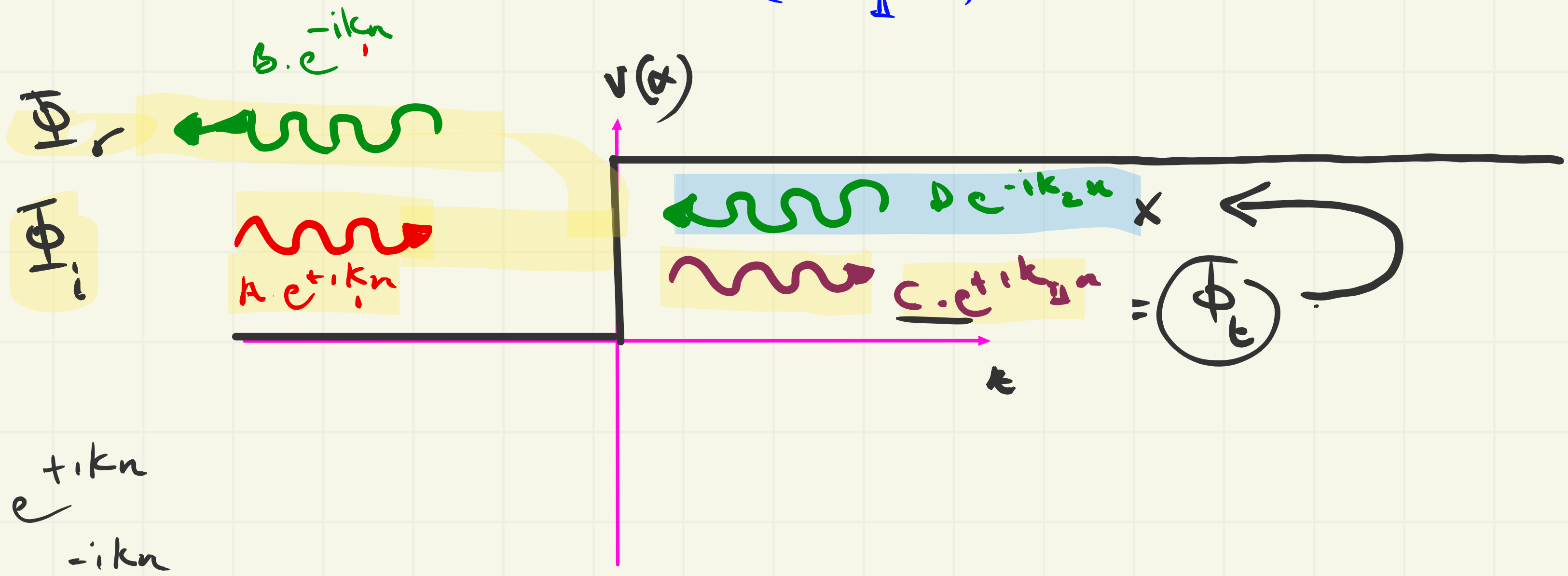
Étape 2 : identifier les # termes de la solution et éliminer les composantes non physiques :

* Analogie optique : op. m $(e^{\pm ikx})$

* condition de convergence / divergence : $e^{\pm \alpha x}$

Exemple de la marche :

$(E > V)$. $\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_I = Ae^{+ik_I x} + Be^{-ik_I x} & x < \\ \Phi_{II}(x) = Ce^{+ik_{II} x} + De^{-ik_{II} x} \end{cases}$



$A.e^{+ikx}$
$B.e^{-ikx}$

$\phi_i = Ae^{+ik_1 x}$ $\phi_r = Be^{-ik_1 x}$ $\phi_t = Ce^{+ik_{II} x}$

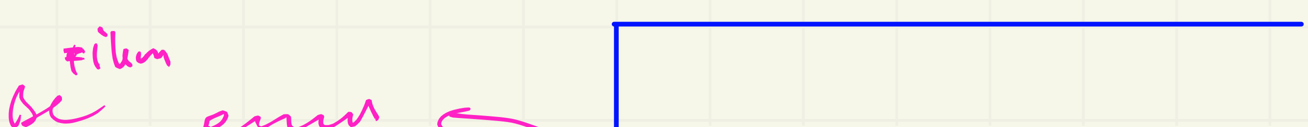
$D.e^{-ik_2 x}$: ne peut pas exister $\Rightarrow$ pas de changement de potentiel

$D = 0$:

$$\Phi = \begin{cases} Ae^{ik_1 x} + B.e^{-ik_1 x} & (I) \\ Ce^{ik_2 x} & (II) \end{cases}$$

$(E < V)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_I = Ae^{+ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \\ \Phi_{II}(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} \end{cases}$$



$A \cdot e^{+ik_1 x}$

$Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$

Dans la région (II) : $x \to +\infty$: $\underline{Ce^{\alpha x}} \to +\infty$

diverge. $\Longrightarrow$ $C = 0$

$De^{-\alpha x}$. CV

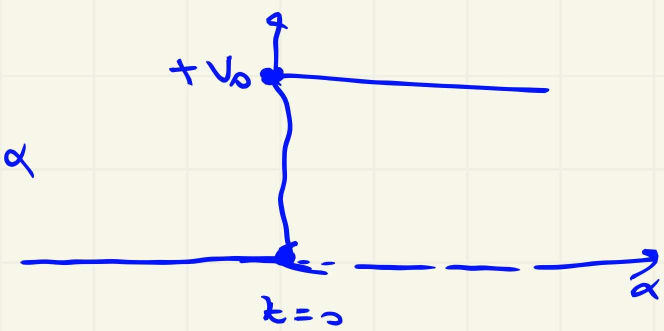
$$\Phi(x) = \begin{cases} Ae^{+ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} & x<0 \\ De^{-\alpha x} & x>0 \end{cases}$$

3) Etape n°3 : les conditions de raccordement.

continuité ϕ et ϕ'.

Exemple de la marche ($E > V$)

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_I = A \cdot e^{ik_1 x} + B \cdot e^{-ik_1 x} & x \leq 0 \\ \Phi_{II}(x) = C \cdot e^{+ik_2 x} & x > 0 \end{cases}$$



On étudie la continuité de $\Phi(x)$, aux points de discontinuité du potentiel.

$x = 0$:

$$\begin{cases} \Phi_I(0) = \Phi_{II}(0) \end{cases}$$

$$\Phi'_I(0) = \Phi'(0)$$

$$\begin{cases} A + B = C \\ i k_1 (A - B) = i k_2 C \end{cases}$$

* le coef. de Reflexion : $R = \frac{|\phi_r|^2}{|\phi_i|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2$

$$\phi_{i} = A e^{+ik_1 x}$$

$$\phi_r = B e^{-ik_1 x}$$

* le coef. de Transmission T :

$$T + R = 1 \quad (T = 1 - R)$$

Formalisme mathématique de la

M.Q.

1. Espace $\mathcal{E}$ des fonctions d'onde d'une particule

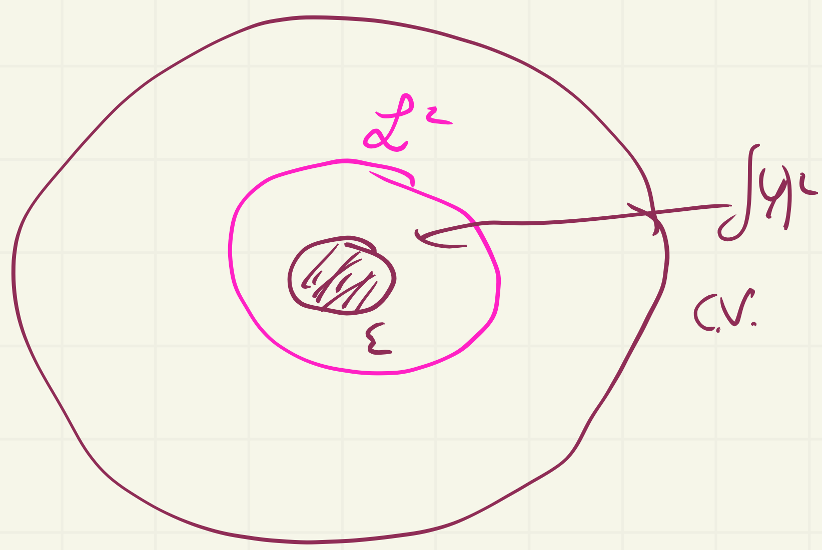
* l'espace des fonctions d'onde de carré sommables :

$$\int_{\text{espace}} |\psi|^2 \, d\vec{r} : \text{ fini et égalité à l'unité.}$$

$\mathcal{L}^2$: espace des fonct de carré sommables. (Hilbert)

* du point de vue physique : $\mathcal{L}^2$ est trop vaste car les fonctions d'ondes, doivent être non seulement définies, continues et indéfiniment mais surtout à support borné

$\mathcal{E}$: sous-espace de $\underline{\underline{\mathcal{L}^2}}$.



structure de $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}$: espace vectoriel formé par des fonctions de carrés sommable.

$$\varphi_1(x) \in \mathcal{E} \qquad \varphi_2(x) \in \mathcal{E}$$

$$\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \in \mathcal{E}.$$

Produit scalaire :

- $\mathbb{R}^3$. $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ et $u \in \mathbb{R}^3$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^* \cdot \psi(x)\, dx \in \mathbb{C}$.

Propriétés :

* $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$
* $\langle \phi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$
* $\langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle = \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle$
* $\langle \phi | \psi \rangle = 0$ implique ϕ et ψ sont orthogonales.

1.2 Base orthonormée complète discrète de $\mathcal{E}$:

* $\{ u_i(x) \}$ ensemble dénombrables de fonctions de carré sommable $\{ u_i(x) \}$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$

cet ensemble est orthonormé si :

$$\langle v_i | v_j \rangle = \int v_i^* \cdot v_j \, dx = \delta_{i,j} \quad *$$

$\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker.

$*$ il est complet si toute fonction $\psi(x)$ se développe

d'une manière unique suivant $u_i(x)$.

$$\psi(x) = \sum_i c_i \, u_i(x) \quad **$$

$\{ u_i(x) \}$ satisfaisant aux (2) conditions $*$ et $**$.

forment une base orthonormée complète discrète

composante de $\psi(x)$:

$$\langle v_j | \psi \rangle = \int u_j(x) \, \psi(x) \, dx$$

$$= \int u_j^*(x) \sum_i c_i \, u_i(x)$$

$$= \sum_i c_i \int u_j^* \, u_i \, dx$$

or $\langle v_j | v_i \rangle = \int v_j^* \, v_i \, dx = \delta_{i,j} \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$

$$\boxed{\langle v_j | \psi(x) \rangle = \sum_i c_i \, \delta_{i,j} = c_j}$$

donc $c_i = \langle u_i | \psi \rangle$

Produit scalaire et norme.

$$\psi(x) = \sum_i c_i u_i(x)$$

$$\Phi(x) = \sum_j b_j u_j(x)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_i \sum_j b_j^* c_i \int u_j^* . u_i \, dx$$

$$= \sum_i \sum_j b_j^* . c_i \delta_{ij}$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_i b_i^* . c_i$$

donc la norme. $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |c_i|^2$

Relation de Fermeture :

$$\psi(x) = \sum_i c_i u_i(x) = \sum_i \langle u_i | \psi \rangle u_i$$

$$= \sum_i \left[\int u_i^*(x') . \psi(x') \, dx' \right] u_i(x)$$

$$\psi(x) = \int \left[\sum_i u_i(x) u_i^*(x') \right] \psi(x') \, dx'$$

$$\psi(x) = \int F(x, x') \psi(x') \, dx'$$

cette écriture de $\psi(x)$ est caractéristique de la fonction delta :

$$\psi(x) = \int \delta(x - x')\, \psi(x')\, dx'$$

on déduit :

$$\sum_i v_i(x)\, v_i(x') = \delta(x - x')$$: relation de Fermeture

Base orthonormée complète continue de $\mathcal{E}$

$$\int v_\alpha^*(x)\, v_\beta(x)\, dx = \delta(\alpha - \beta)$$: orthogonalité

$$\int v_\alpha(x) \cdot v_\alpha^*(x')\, d\alpha = \delta(x - x')$$: Fermeture

Composante de $\psi(x)$

$$c_\alpha = \langle v_\alpha | \psi \rangle = \int v_\alpha^*\, \psi(x)\, dx$$

$$\int d\alpha\, c_\alpha \cdot v_\alpha(x) = \int d\alpha \int dx'\, v_\alpha^*(x') \cdot \psi(x')\, v_\alpha(x)$$

$$\int d\alpha\, c_\alpha\, v_\alpha(x) = \int dx' \int \left[d\alpha\, v_\alpha^*(x) \cdot v_\alpha(x') \right] \psi(x')$$

$$= \int dx'\, \delta(x - x')\, \psi(x')$$

Comme : $\int dx'\, \delta(x - x')\, \psi(x') = \psi(x)$ on a alors :

$$\psi(x) = \int d\alpha\, c_\alpha\, v_\alpha(x)$$

$\cdot\, c_\alpha$: apparaît alors comme la composante de $\psi(x)$ sur $v_\alpha(x)$

Expression du produit scalaire et de la norme :

$$\psi(x) = \int d\alpha \; c_\alpha \, v_\alpha(x)$$

$$\Phi(x) = \int d\alpha' . \, b_{\alpha'} . \, v_{\alpha'}(x) .$$

le produit scalaire s'écrit :

$$\langle \Phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^* \psi \, dx$$

$$= \iiint d\alpha' . \, d\alpha \, dx \, b^*_{\alpha'} \, c_\alpha \, v^*_{\alpha'} \, v_\alpha$$

$$\langle \Phi | \psi \rangle = \iint d\alpha' \, d\alpha \, b^*_{\alpha'} \, c_\alpha \int v^*_{\alpha'} \, v_\alpha \, dx$$

$$= \iint d\alpha' d\alpha \, b^*_{\alpha'} c_\alpha \; \delta(\alpha - \alpha')$$

$$= \int d_\alpha . \, b^*_\alpha \, c_\alpha$$

$$= \int d_\alpha \, b^*_\alpha \, c_\alpha$$

norme.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d_\alpha . |c_\alpha|^2$$

base discrète	base continue
i	α
$\sum_i$	$\int d\alpha$

δ_{ij} $\delta(\alpha-\alpha')$

Exemple de fonctions $v_\alpha(x)$:

$$v_{x_0} = \delta(x-x_0)$$

x_0 : abscisse qui joue le rôle de α

v_{x_0} vérifient les relations d'orthogonalité et de fermeture :

$$\int dx \; v^*_{x_0}(x) \cdot v_{x'_0}(x) = \int \delta(x-x_0)\,\delta(x-x'_0)\,dx$$

$$= \delta(x_0 - x'_0)$$

$$\int dx_0 \; v_{x_0}(x) \; v^*_{x_0}(x') = \int \delta(x-x_0)\,\delta(x'-x_0)\,dx_0$$

$$= \delta(x-x')$$

v_{x_0} forment une base continue complète et on a

$$\psi(x) = \int \psi(x_0)\,\delta(x-x_0)\,dx_0$$

On écrit souvent $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ c'est la représentation x.

Les ondes planes

c'est l'ensemble des fonctions définies par :

$$v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{ipx/\hbar}$$

les $v_p(x)$ vérifient bien les relations d'orthogonalité et de fermeture. On a en effet :

$$\int dx\, v_p^*(x) \cdot v_{p'}(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{i(p'-p)x/\hbar}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int e^{i(p'-p)u}\, du$$

$$= \delta(p-p')$$

$$\int dp \cdot v_p(x)\, v_p^*(x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{i(x-x')p/\hbar}\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-x')k}\, dk$$

$$= \delta(x-x')$$

Nb : les résultats des intégrales découlant des transformées de Fourier des fonctions de Dirac.

$\{\varphi_p\}$ forment une base orthonormé complete

continue . $\forall \psi(x)$.

$$\psi(x) = \int dp \cdot c_p \cdot \varphi_p(x)$$

$$c_p = \langle \varphi_p | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x)\, dx$$

$$= \overline{\Psi}(p)$$

donc. $$\psi(x) = \int dp\, \overline{\Psi}(p) \cdot \varphi_p(x)$$

on écrit souvent : $\overline{\Psi}(p) = \langle p | \psi \rangle$

Notation de Dirac

. choisir une représentation, c'est se donner une base orthonormé complète (discrète ou continue) suivant laquelle se décompose chq fonction de $\mathcal{E}$.

* Comme en geométrie euclidienne, on peut représenter l'état quantique d'une particule par un vecteur appartenant à un espace vectoriel qu'on appelle "espace des états".

vecteurs "ket" et "bras"

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi(x') \\ \vdots \\ \psi(x^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}(p) \\ \overline{\psi}(p') \\ \vdots \\ \overline{\psi}(p^i) \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle \longrightarrow \langle\psi|$$

$$\langle\psi| = (c_1^* \ c_2^* \ \dots \ c_i^* \dots) = | \dots \psi^*(x) \dots \psi^*(x') \dots \psi^*(x_i) |$$

$$= | \dots \overline{\psi}^*(p) \dots \overline{\psi}^*(p') \dots \overline{\psi}^*(p_1) \dots |$$

l'ensemble des vecteurs 'bra's' constitue un espace qu'on note $\mathcal{E}^*$

l'espace dual de $\mathcal{E}$.

Les operateurs linéaires :

$$|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle$$

$$A(\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1 A|\psi_1\rangle + \lambda_2 A|\psi_2\rangle$$

Example :

$$X : \quad \psi(x) \longrightarrow x \cdot \psi(x)$$

$$P : \quad \psi(x) \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

$$\Pi : \quad \psi(x) \longrightarrow \psi(-x)$$

produit de deux operateurs - commutateur :

$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle)$$

en générale: $AB \neq BA$.

on définit $[A,B] = AB - BA$

si $[A,B] = 0$ on dit que les deux opérateurs commutent.

Exemple: $[X,P]$:

ds $\{x\}$: $\quad X.P.\psi = x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\psi = \frac{\hbar}{i} x \frac{d\psi}{dx}$

$$P X \psi = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x\psi) = \frac{\hbar}{i} x \frac{d\psi}{dx} + \frac{\hbar}{i}\psi$$

$$(XP - PX)\psi = -\frac{\hbar}{i}\psi = i\hbar\psi$$

d'où: $\quad [X,P] = i\hbar \, \mathbb{1}$.

Représentation d'un opérateur par une matrice:

$$A_{ij} = \langle v_i|A|v_j\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_i^* \left[A v_j(x)\right] dx$$

si on connaît c_i, on peut déduire c'_i de $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle \qquad |\psi'\rangle = \sum_i c'_i |v_i\rangle$$

$$c'_j = \langle v_j|\psi'\rangle = \langle v_j| \sum_i c_i A|v_i\rangle$$

$$= \sum_i \langle v_j | A | v_i \rangle c_i = \sum_i A_{ji} c_i$$

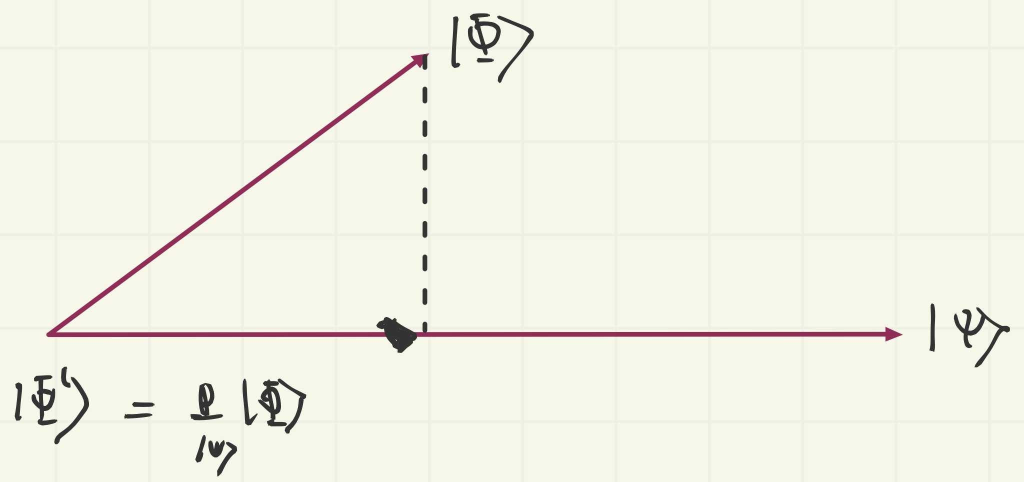
soit $c'_i = \sum_j A_{ij} c_j$

Exemple d'opérateur linéaire : le projecteur.

$$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$P_{|\psi\rangle} |\Phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\Phi\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

$P_{|\psi\rangle}$ est l'opération de projection orthogonale sur le ket $|\psi\rangle$



$$P^2_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = P_{|\psi\rangle}$$ - projeter deux fois de suite sur un vecteur donné est ~ à projeter une seule fois.

Relation de Fermeture :

$\{ u_i \}$: B.O.C. discrète

$$P_{\{u_i\}} = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$P_{\{v_i\}} |\psi\rangle = \sum_i |v_i\rangle \langle v_i|\psi\rangle$$

$$= \sum_i c_i |v_i\rangle = |\psi\rangle$$

on a donc $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{E}$.

$$P_{\{v_i\}} = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i| = \mathbb{1}$$

opérateur adjoints :

A et $A^\dagger$ sont adjoints si :

a) $\langle v_j | A^\dagger | v_i\rangle = \langle v_i | A | v_j\rangle^*$

$$\langle \Phi | A^\dagger | \psi\rangle = \langle \psi | A | \Phi\rangle^*$$

b) si $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle \iff \langle\psi'| = \langle\psi|A^\dagger$

Propriétés :

$(A^\dagger)^\dagger = A$ $\qquad (\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$

$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ $\qquad (AB)^\dagger = B^\dagger . A^\dagger$

Règles de conjugaison :

* Renverser l'ordre des termes
* ket $\longrightarrow$ Bra

* complexe conjugué des constants.
* $A \longrightarrow A^{\dagger}$

Exp : $\lambda AB|\psi\rangle \longrightarrow \lambda^{*} B^{\dagger}A^{\dagger}\langle\psi|$

opérateurs hermitiques

si $A = A^{\dagger}$ alors A est hermitique.

en représentation matricielle : $A_{ij} = A_{ji}^{*}$

$$\langle\psi|A|\Phi\rangle = \langle\Phi|A|\psi\rangle^{*}$$

Exemple : $P_{|\psi\rangle}$, X, P :

$$P_{|\psi\rangle}^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\psi|^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\psi| = P_{|\psi\rangle}$$

vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur.

$|\Phi_n\rangle$ est vect. propre de A si :

$$A|\Phi_n\rangle = a_n|\Phi_n\rangle$$

Equation caractéristique :

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$$\langle v_i | A | \psi \rangle = \lambda \langle v_i | \psi \rangle = \lambda c_i$$

en insérant le projecteur : $\mathbb{1}_{\{v_i\}}$ entre A et $|\psi\rangle$:

$$\langle v_i | A \sum_j |v_j\rangle\langle v_j|\psi\rangle = \sum_j \langle v_i|A|v_j\rangle\langle v_j|\psi\rangle$$

$$= \sum_j A_{ij} \cdot c_j$$

soit :

$$\sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i$$

ou encore.

$$\sum_j \left(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right) c_j = 0$$

système d'équation qui admet une solution si le déterminant

est nul :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

vecteur propre et valeurs propres d'un opérateur hermétique :

$$A|\Phi_n\rangle = a_n |\Phi_n\rangle \quad *$$

$$\langle \Phi_n | A^\dagger = a_n^* \langle \Phi_n | \quad **$$

$|\Phi_n\rangle$ sur $*$:

$$\langle \Phi_n | A | \Phi_n \rangle = a_n$$

$$\langle \Phi_n | A^\dagger | \Phi_n \rangle = a_n^*$$

$A = A^\dagger$: alors. $a_n = a_n^*$ donc: $a_n \in \mathbb{R}$

2 vecteurs propres correspondant à des valeurs propres

différents sont orthogonaux :

$$A|\Phi_n\rangle = a_n|\Phi_n\rangle$$

$$\langle\Phi_m|A = a_m\langle\Phi_m|$$

alors. $\langle\Phi_m|A|\Phi_n\rangle = a_n\langle\Phi_m|\Phi_n\rangle \quad (i)$

$\langle\Phi_m|A|\Phi_n\rangle = a_m\langle\Phi_m|\Phi_n\rangle \quad (ii)$

(i) - (ii) : $(a_n - a_m)\langle\Phi_m|\Phi_n\rangle = 0$

comme $a_n \neq a_m$. $\langle\Phi_m|\Phi_n\rangle = 0$

$|\Phi_n\rangle$ et $|\Phi_m\rangle$ sont orthogonaux,