Wednesday 1 February 2023 09:42

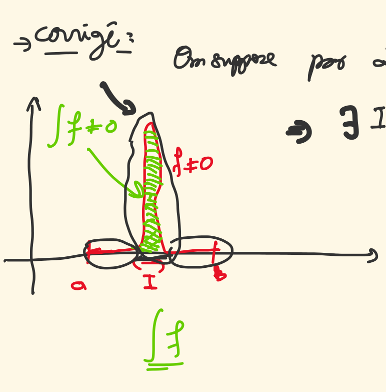
exercice 1:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive sur $[a,b]$

avec : $\int_a^b f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow$ f est nulle sur $[a,b]$;

corrigé: On suppose par absurde que f est non nulle sur $[a,b]$



$\Rightarrow \exists I \subset [a,b]$ tq : $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

On a : $\underbrace{\int_I f(t)\,dt > 0}$

$\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt} = \int_I f(t)\,dt + \underbrace{\int_{[a,b]/I} f(t)\,dt}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_I f(t)\,dt > 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt > 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \neq 0$ absurde !

(car $\int_a^b f(t)\,dt = 0$)

$\Rightarrow$ f est donc nulle sur $[a,b]$;

ex2: On considère $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue telle que : $f \neq 0$

et : $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f^2(t)\,dt$

$\boxed{\bullet \ \text{Mq: } \forall t \in [0,1] : f(t) = 1}$

indice : si f continue et ≥ 0 sur $[a,b]$ avec : $\int_a^b f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow f = 0$ sur $[a,b]$.

On a : $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)^2\,dt \Rightarrow \int_0^1 \left(f(t) - f(t)^2\right) dt = 0$ ①

f est continue alors : $f - f^2$ est continue ② sur $[a,b]$;

On sait que : $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq x$

$\Rightarrow x - x^2 \geq 0$,

de même : $\forall t \in [0,1]$: $\boxed{f(t) - f(t)^2 \geq 0}$ ③ car $f(t) \in [0,1]$

de ①, ② et ③ ; on en déduit que : $f(t) - f(t)^2 = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow f(t) = 0$ ou $f(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

puisque : $f \neq 0$; donc : $f = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

ex 6: $F_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$; $F_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$

1) Mq: F_1 et F_2 convergent ;

2) " " " ne cvgent. pas abs. .

_propriété : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^a}\,dt$ converge $\forall a > 0$;

de m pour : $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^a}\,dt$ cvge. $\forall a > 0$

1) On a : $F_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$;

on pose : $u = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{u}$

$\Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{d\sqrt{u}}{du}$

$\Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$

d'où : $F_1 = \int_0^{+\infty} \sin(u) \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{1/2}}\,du$

$= \int_0^1 \frac{\sin u}{2u^{1/2}}\,du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{1/2}}\,du}$ $\rightarrow$ converge car $a = \frac{1}{2} > 0$

$\frac{\sin u}{2u^{1/2}} \underset{0^+}{\sim} \frac{u}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{2}$

et : $\int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{2}\,du$ converge

car : $\int_0^1 \frac{u^{1/2}}{2}\,du$ (intégrale de Riemann convergente)

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$ converge

$\Rightarrow F_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge ;

(on démontre la convergence de la même façon pour $F_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$)

2) Mq: F_1 ne converge pas absolument.

$\hookrightarrow \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$ diverge !

on a : $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}}\,dt}$ changement de variable, $t = x^2$

dvge

on a : $\forall t \in \mathbb{R}$: $|\sin(t)| \leq 1 \Rightarrow |\sin(t)|^2 \leq |\sin t|$

$|\sin(t)|^2 = \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ formule trigonométrique

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}} \geq \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{4\sqrt{t}}\,dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} - \frac{\cos(2t)}{4\sqrt{t}}\,dt$

$\frac{\cos(2t)}{4\sqrt{t}}$: convergente (q1 F_2) ; $u = 2t$; $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}}\,dt$ converge car elle est de forme : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt = F_2$

$\frac{1}{4\sqrt{t}}$: diverge vers $+\infty$

$\int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{t}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}}$

d'après Riemann : converge ($a = \frac{1}{2} < 1$) ; divergente car $a > 1$! ceci n'est pas vérifié car : $a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{4\sqrt{t}}\,dt$ diverge vers $+\infty$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge vers $+\infty$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} |\sin x^2|\,dx$ diverge

$\Rightarrow F_1$ ne converge pas absolument !

F_2

exercice 5:

f continue, ≥ 0, sur $[a,b]$;

$\forall x \in [a,b]$: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

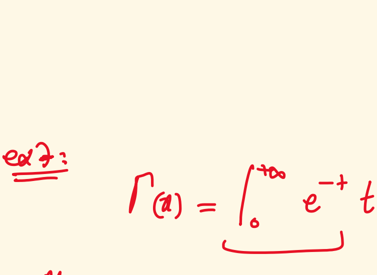
1) (Sous reserve d'existence : $\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = g'(x) f(g(x)) - h'(x) f(h(x))$) ; $g(x) = x$, $h(x) = a$

$\forall x \in [a,b]$: $F'(x) = (x)' f(x) - (a)' f(a)$; $(x)' = 1$, $(a)' = 0$

$\forall x \in [a,b]$: $F'(x) = f(x) \geq 0$ sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ F est croissante sur $[a,b]$,

2) Mq: si $F(b) = 0 \Rightarrow F = 0$ sur $[a,b]$;

- F est croissante sur : $[a,b]$;
- F est positive sur $[a,b]$; (car $f \geq 0$



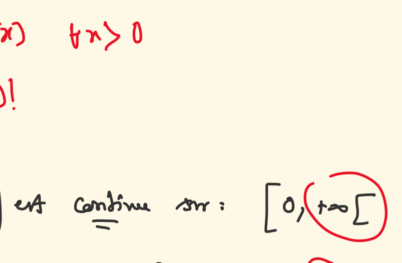
$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \geq \left(\int_a^x 0\,dt\right)$ (car l'intégrale conserve l'ordre)

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F(x) \geq 0$)

$\Rightarrow F = 0$ sur $[a,b]$;

(sinon : si $F \neq 0$ sur $[a,b]$;

$F(b) = 0$; $F \nearrow$:



$\Rightarrow F < 0$ ⚠)

ex7:

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$

Mq:
1) $\Gamma(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$; (converge)
2) $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!$

1) la fonction : $t \longmapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur : $[0, +\infty[$ pour $x \geq 1$

ou $]0, +\infty[$ pour $0 < x < 1$

On a : $\underbrace{t^2 \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1}} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow e^{-t} t^{x-1} t^2 \underset{+\infty}{=} o(1) \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

on sait que : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge d'après Riemann ; cvge $\Leftarrow$ cvge

et : $\frac{1}{t^2} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$; $\frac{1}{t^2} > 0$

d'où ; d'après le critère de domination / de négligeabilité

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ converge ;

- étudions la cvgence : de : $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$; On a : $e^{-t}(t^{x-1}) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$; $e^{-t} \to 1$

$t^{x-1} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$

et $\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ converge car : $x > 0$

$\Rightarrow 1 > 1 - x$; $1 - x = a$

d'après Riemann ; $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ converge

Selon le critère d'équ : $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$ converge.

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ converge ;

2) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(1) = 1}$

Mq: $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$; $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$

$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1-1}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x\,dt = \int_0^{+\infty} (-e^{-t})' (t^x)\,dt$

$= \underbrace{\left[(-e^{-t}) \cdot t^x\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t})(t^x)'\,dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-t} x\, t^{x-1}\,dt$

$\underbrace{\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!$

- pour : $n = 1$: $\Gamma(1) = 1$ (d'après q2) $= (1-1)! = 0! = 1$

proposition vraie pour $n = 1$;

- On sg: $\Gamma(n) = (n-1)!$; et on mq: $\Gamma(1+n) = n!$

d'après (q2) : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $x > 0$;

donc : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$

$\Gamma(n+1) = n!$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!$