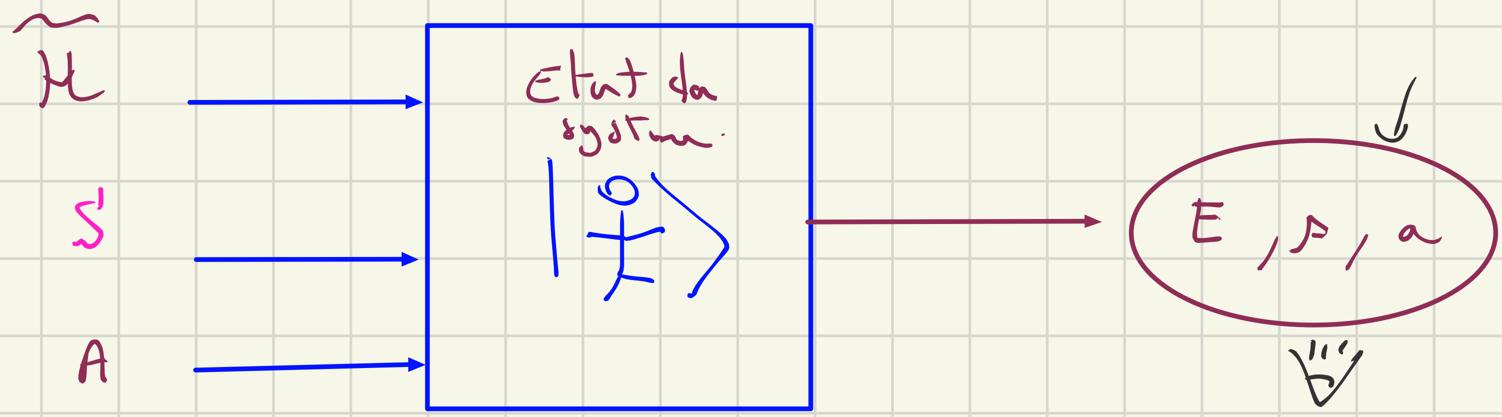
$|\psi\rangle$

e^- . Energie

Appareil de mesure $\rightsquigarrow$ résultat de mesure réels

observables : opérat. hermitique $\rightsquigarrow$ val propres réels.



observables (Appareils de mesures)

valeurs propres (résultat de mesure)

$\exists(E), \exists(s), \exists(a)$

$[H,S]=0, \quad [H,A]=0, \quad [S,A]=0$

E.C.O.C

Méc. Quantique 1

Hamza ICHOU

SÉRIE 5 :

Exercice 1

On considère un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions et rapporté à la base orthonormée formée par $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'hamiltonien H du système et l'observable A sont donnés par :

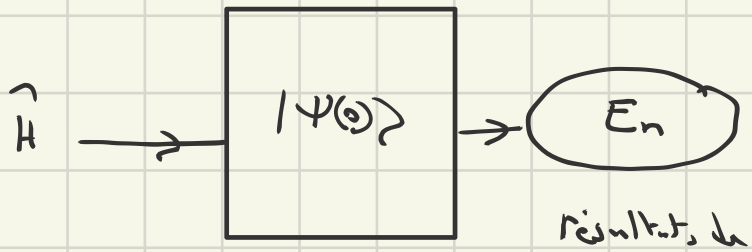
$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a et ω_0 sont des constantes réelles. Le système à l'instant $t = 0$ est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

1) On mesure, à l'instant $t = 0$, l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
   - Calculer pour le système dans l'état $|\psi(0)>$ l'écart quadratique moyen ΔH.
2) A $t = 0$ on mesure H, on trouve $2\hbar\omega_0$, quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure?
3) Au lieu de mesurer H à l'instant $t = 0$, on mesure A, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?
4) Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)>$ du système à l'instant t.
5) Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Interprétation ?

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$



résultats de la mesure (val. propre de $\hat{H}$

1°) Energie du système (val propre de $\hat{H}$) :

$$\det(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}_{3,3}) = 0$$

val. propr. = Résultats de mesure = $\{\hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0\}$

2 fois dégénéré

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \end{array} \\ H = \hbar\omega_0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} |u_1\rangle \\ |u_2\rangle \\ |u_3\rangle \end{array}$$

$H|u_1\rangle = \hbar\omega_0 1 |u_1\rangle$: E v.p (non dégénéré)

$|u_1\rangle$: vect. propre associé à $\hbar\omega_0$

$$\left.\begin{array}{l} H|u_2\rangle = 2\hbar\omega_0|u_2\rangle \\ H|u_3\rangle = 2\hbar\omega_0|u_3\rangle \end{array}\right\} \text{2 fois dégénéré}$$

* probabilité :

$$\text{Résultats de mesures} = \{ \underbrace{\hbar\omega_0}_{|u_1\rangle} , \underbrace{2\hbar\omega_0}_{|u_2\rangle,\,|u_3\rangle} \}$$

$$P(\hbar\omega_0) = |\langle u_1 | \psi(0)\rangle|^2$$

$$\langle u_1 | \psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle u_1 | \psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$P(\hbar\omega_0) = \frac{1}{2}$$

* $P(2\hbar\omega_0)$. $$P(2\hbar\omega_0) = \sum_i |\langle u_i | \psi(0)\rangle|^2$$

$$P(2\hbar\omega_0) = |\langle u_2 | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3 | \psi(0)\rangle|^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\sum P(E_n) = 1$$

Ecart quadratique : $\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle$ ✓

$$\langle H\rangle_{|\psi(0)\rangle} = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle A\rangle = \sum_n P(a_n) \cdot a_n \quad ✓$$

$$\langle H\rangle = \sum P(E_n)\, E_n \quad ✓$$

$$= \hbar\omega_0 \times \frac{1}{2} + (\cancel{2}\hbar\omega_0) \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\langle H\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 \rightarrow \langle H\rangle^2 = \frac{9}{4}(\hbar\omega_0)^2$$

$$\Delta H = \left(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right)^{1/2}$$

* H^2 : $$H^2 = (\hbar\omega)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Val propres : $= \{ \underset{1/2}{(\hbar\omega)^2},\ \underset{1/2}{4(\hbar\omega_0)^2} \}$

$$\langle H^2 \rangle = \sum P(a_n)\, a_n$$

$$= \frac{1}{2} \times (\hbar\omega_0)^2 + \frac{1}{2}\, 4 \cdot (\hbar\omega)^2$$

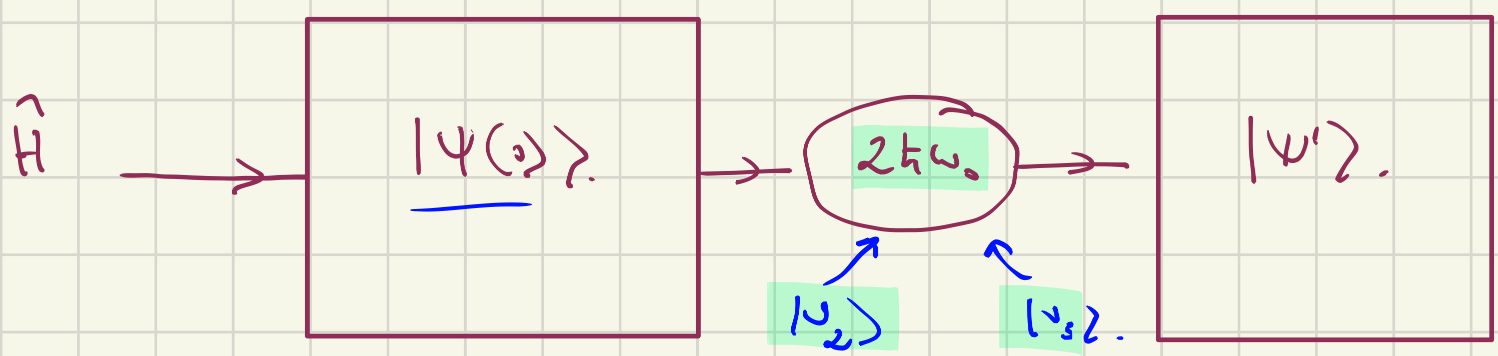
$$\langle H^2 \rangle = \frac{5}{2} (\hbar\omega_0)^2$$

$$\Delta H^2 = \frac{5}{2} (\hbar\omega_0)^2 - \frac{9}{4} (\hbar\omega)^2$$

$$\Delta H^2 = \frac{1}{4} \cdot (\hbar\omega_0)^2 .$$

2) À $t = 0$, mes $\{H\} = 2\hbar\omega_0$.

avant la mesure — après la mesure



$$|\psi'\rangle = \frac{P_n\, |\psi\rangle}{\| P_n\, |\psi\rangle \|},$$

P_n : projecteur : $P^2 = P$

$$P_n = |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| .$$

$$P_n|\psi(0)\rangle = \left(|u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|\right)|\psi(0)\rangle$$

$$= |u_2\rangle\underbrace{\langle u_2|\psi(0)\rangle} + |u_3\rangle\underbrace{\langle u_3|\psi(0)\rangle}_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$\|P_n|\psi(0)\rangle\| = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{\frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|u_2\rangle + |u_3\rangle\right\}$$

Réduction du paquet d'onde.

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

3) $\tilde{A} \to \boxed{|\psi(0)\rangle} \to a_n$

$$\begin{array}{cccc} & |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \\ A = a & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & |u_2\rangle & |u_3\rangle \\ \bar{A} = a & \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\bar{A} - \lambda \mathbb{1}_{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_+ = +a \\ \lambda_- = -a \end{cases}$$

$+a$: $\to |u_n\rangle$, $\to |+a\rangle$

$-a \to |-a\rangle$

$*\quad \mathcal{P}(+a) = \langle \underset{\sim}{+a} | \psi(0)\rangle + \langle u_1 | \psi(0)\rangle .$

$\underline{\underline{|+a\rangle}}$: $\quad \bar{A}|+a\rangle = \underset{\sim}{+a}\ \underline{|+a\rangle}$. $\quad$ E.V. 3. $\quad$ (i)

$$|+a\rangle = \alpha|u_2\rangle + \beta|u_3\rangle .$$

(i) $\Rightarrow$: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\cancel{a}\beta = \cancel{a}\alpha . \qquad \boxed{\alpha = \beta}$$

$|+a\rangle$: normé. $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 .$

$$|\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1 .$$

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2} .$$

$$\underline{\underline{|\alpha|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\theta} \qquad (\theta = 0)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta .$$

$$\underline{\underline{|+a\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle . \quad + 0|u_1\rangle$$

$$\mathcal{P}(+a) = |\langle \underset{\sim}{+a} | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_1 | \psi(0)\rangle|^2$$

$$\langle +a|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

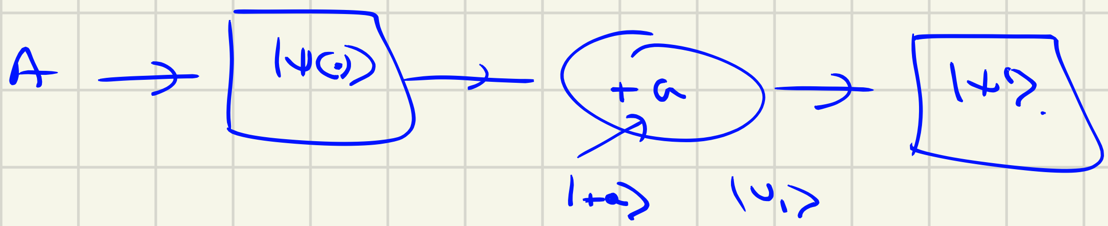
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\langle u_1 | \psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{P}(+a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\mathcal{P}(-a) = 0$$

* $|\psi'\rangle$.



$$|\psi'\rangle = \frac{P_n |\psi(0)\rangle}{\| P_n | \psi(0)\rangle \|}$$

$$P_n = |+a\rangle\langle +a| + |u_1\rangle\langle u_1|.$$

$$P_n|\psi(0)\rangle = |+a\rangle\langle +a|\psi(0)\rangle + |u_1\rangle \underbrace{\langle u_1|}\psi(0)\rangle.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{|+a\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}} \underbrace{|u_1\rangle},$$

$$= \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = |\psi(0)\rangle$$

$|\psi'\rangle = |\psi(0)\rangle$: pas d'évolution

4) l'état à l'instant t :

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,.\,|\psi(0)\rangle.$$

$$U(t,t_0) = \exp\left(-i\,\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right).$$

$$U(t,t_0)\,|\psi(0)\rangle = \exp\left(-i\,\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right\}.$$

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle.$$

$$f(A)\,|u_n\rangle = f(a_n)\,|u_n\rangle$$

$$U(t,t_0)\,|\psi(0)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\,\frac{i}{\sqrt{2}}\,.\,|u_1\rangle + e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\,\frac{1}{2}\,|u_2\rangle + e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\,.\,\frac{1}{2}\,|u_3\rangle.$$

or $\quad \hat{H}|u_1\rangle = \hbar\omega_1|u_1\rangle$

$$\exp\left(-i\,\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)|u_1\rangle = \exp\left(-i\,\frac{\hbar\omega t}{\hbar}\right)|u_1\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{-i\omega t}\,.\,|u_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega t}}{2}\,|u_2\rangle + \frac{e^{-2i\omega t}}{2}\,|u_3\rangle.$$

$$T) \quad A \longrightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle} \longrightarrow a_n.$$

$$(AB^*)^t = AB.$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & +2i & 0 \\ -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

$(B^*)^T = B$: B : hermitique.

Exercice 4

Dans la description de Schrödinger les états d'un système quantique évoluent avec le temps conformément à la loi :

$$|\alpha(t)> = U\,(t, t_0)|\,\alpha\,(t_0)>$$

$\mathrm{U}\,(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0)$ est un opérateur linéaire unitaire d'évolution défini par la relation :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} U\,(t, t_0) = \boldsymbol{H}\,(t, \boldsymbol{t_0})\,U\,(t, t_0)} \quad \text{avec} \quad U\,(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{1}$$

Dans laquelle H est l'hamiltonien associé à l'énergie du système.

1) Retrouver l'équation de Schrödinger qui régit l'évolution des états $|\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) >$.
2) Établir la loi qui gouverne l'évolution des valeurs moyennes des observables du système.
3) La description de Heisenberg se déduit de celle de Schrödinger par transformation unitaire $\boldsymbol{U}^+\,(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_0)$. A l'état $|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})\rangle$ et à l'observable A, de la description de Schrödinger, correspondent donc, dans la description de Heisenberg, l'état $|\,\boldsymbol{\alpha_H} >$ et l'observable $\boldsymbol{A_H}(\boldsymbol{t})$ tels que :

$$|\alpha_H> = U^+\,(t, t_0)|\,\alpha(t)> \qquad \text{et} \qquad A_H(t) = U^+\,(t, t_0)\,A U\,(t, t_0)$$

Trouver l'équation d'évolution des observables dans la description de Heisenberg.

4) Trouver la forme, dans la description de Heisenberg, des opérateurs position $\boldsymbol{X_H}(\boldsymbol{t})$ et d'impulsion $\boldsymbol{P_H}(\boldsymbol{t})$ (avec $\mathrm{t}_0 = 0$) d'une particule libre.

1)
$$i\hbar\,\frac{d|\alpha\rangle}{dt} = i\hbar\,\frac{d}{dt}\left(U(t,t_0)\,|\alpha(t_0)\rangle\right)$$

$$= i\hbar\left(\frac{d}{dt}U(t,t_0)\right)|\alpha(t_0)\rangle$$

$$= H\,U(t,t_0)\,|\alpha(t_0)\rangle.$$

$$\left(i\hbar\,\frac{d|\alpha\rangle}{dt}\right)^* = \left(H\,|\alpha(t)\rangle\right)^+ \qquad (AB)^+ = B^+ . A^+.$$

$$-i\hbar\,\frac{d}{dt}\langle\alpha| = \langle\alpha|\,H^+ \rightarrow \frac{d}{dt}\langle\alpha| = -\frac{1}{\cdots}\langle\alpha|\,H.$$

2) soit A un op. qlq :

$$\langle A \rangle_{|\alpha\rangle} = \langle \alpha | A | \alpha \rangle ,$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha(t) | A | \alpha(t) \rangle \right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha | \right) A | \alpha \rangle + \langle \alpha | \frac{dA}{dt} | \alpha \rangle$$

$$+ \langle \alpha | A \frac{d|\alpha\rangle}{dt} .$$

$$= \boxed{\frac{-1}{i\hbar} \langle \alpha | H A | \alpha \rangle} + \langle \frac{dA}{dt} \rangle_{|\alpha\rangle} + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha | A \left(\frac{1}{i\hbar} \cdot H | \alpha \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha | \left(AH - HA \right) | \alpha \rangle + \langle \frac{dA}{dt} \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \cdot \langle \alpha | [A, H] | \alpha \rangle + \langle \frac{dA}{dt} \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle . = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle_{|\alpha\rangle} . + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle_{|\alpha\rangle} .$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, H] \rangle + \langle \cancel{\frac{\partial x}{\partial t}} \rangle^{0}$$

$$[x, H] = [x, \frac{p^2}{2m} + V(x)] =$$

$$= [x, \frac{p^2}{2m}] + [x, V(x)] .$$

$$= [x, p] \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{\partial p^2}{\partial p} + [x, x]^{0} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} .$$

$$[A, f(B)] = [A, B] \cdot \frac{\partial f}{\partial B}$$

$$= i\hbar \cdot \frac{\cancel{2}P}{\cancel{2}m} = i\hbar \cdot \frac{P}{m}.$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{\cancel{i\hbar}}\left\langle \cancel{i\hbar}\, \frac{P}{m}\right\rangle = \frac{1}{m}\langle P\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{\langle P\rangle}{m}}$$

Ex 8.

$$\underline{\underline{A}}\, \psi(x) = \sqrt{\psi(x)}. \quad \checkmark \quad A \cdot = \sqrt{\cdot}.$$

$$A(\lambda\psi_1 + \gamma\psi_2) = \lambda A\psi_1 + \gamma A\psi_2$$

$$A(\lambda\psi_1 + \gamma\psi_2) = \sqrt{\lambda\psi_1 + \gamma\psi_2}.$$

$$\lambda A\psi_1 + \gamma A\psi_2 = \lambda\sqrt{\psi_1} + \gamma\sqrt{\psi_2}$$

A : n'est pas linéaire.

- $$D_x = \frac{d}{dx}$$

$$D_x \cdot \psi = \frac{d\psi}{dx}$$

$$D_x(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \frac{d}{dx}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)$$

$$= \lambda_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \lambda_2 \frac{d\psi_2}{dx}$$

$$\lambda_1 D_x \psi_1 + \lambda_2 D_x \psi_2 = \lambda_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \lambda_2 \frac{d\psi_2}{dx}$$

D_x : operateur lineaire.

$$C\psi = \ln(\psi).$$

$$C(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \ln(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2).$$

$$\neq$$

$$\lambda_1 C\psi_1 + \lambda_2 C\psi_2 = \lambda_1 \ln\psi_1 + \lambda_2 \ln\psi_2$$

C : n'est pas lineaire.

Exercice 10

Soit dans un problème à une dimension, une particule dont la fonction d'onde est donnée par :

$$\psi(x) = N\frac{e^{i\frac{p_0}{\hbar}x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Où a et p_0 sont des constantes réelles, et N un coefficient de normalisation.

1) Déterminer N pour que $\psi(x)$ soit normée.
2) On mesure la position de la particule; quelle est la probabilité pour que le résultat soit compris entre $-a/\sqrt{3}$ et $+a/\sqrt{3}$?
3) Calculer la valeur moyenne de l'impulsion d'une particule ayant $\psi(x)$ comme fonction d'onde.

Hamza ICHOU

1) ψ est normé $\Leftrightarrow$ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{\text{espace}} \psi^* \cdot \psi \, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|N|^2}{x^2+a^2}\, dx = 1 \implies |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = 1$$

$$|N|^2 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}}.$$

$$|N| = \sqrt{\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}}}$$

$$x = a \cdot tg\,\theta \implies x^2 + a^2 = a^2 tg^2\theta + a^2$$

$$= a^2(1 + tg^2\theta).$$

$$x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2\theta}.$$

$$dx = a \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{a} \cdot d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} \times \frac{\cancel{\cos^2\theta}}{a^2}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a} = \frac{1}{a}\, \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{a}.$$

$$|N| = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \;\rightsquigarrow\; N = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{i\phi}$$

2) $$P\left(-\frac{a}{\sqrt{3}} < x < +\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{+\frac{a}{\sqrt{3}}} |\psi|^2 \, dx$$

3) $$\langle p \rangle_{(\psi)} = \langle \psi | p | \psi \rangle \qquad \int |x\rangle\langle x| \, dx = \mathbb{1}$$

$$= \langle \psi | \, p \cdot \mathbb{1} \, | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \, p \cdot \int |x\rangle \langle x| \, dx \; |\psi\rangle$$

$$= \int \langle \psi | p | x \rangle \langle x | \psi \rangle \, dx$$

$$= \int \langle \psi | p | x \rangle \, \psi(x) \, dx$$

$$= \int \left(\langle x | p | \psi \rangle \right)^* \psi(x) \, dx$$

$$= \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) \, dx \qquad p$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^* \, p \, \psi(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \, \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{d}{dx} \psi(x) \, dx$$

$$\hat{X} \longrightarrow x. \qquad \hat{X} |x\rangle = x \cdot |x\rangle.$$

$|p\rangle$: $\qquad \hat{P}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$

$\hat{X}\,|p\rangle = i\hbar \frac{d}{dp}\,|p\rangle$?!

Exercice 15

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω, l'hamiltonien est alors donné par ;

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

A l'instant t = 0, l'état de cet oscillateur est donné par ; $|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n\,|\varphi_n\rangle$ où $|\varphi_n\rangle$ sont les états stationnaires de H, d'énergies ;

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

1) Déterminer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$. Quelle est la probabilité P pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur effectuée à l'instant t donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$? Lorsque $\mathscr{P} = 0$, quels sont les coefficients C_n non nuls?
2) On suppose à partir de maintenant que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro.
   a) Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle, \langle P\rangle, \langle X^2\rangle$ et $\langle P^2\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$, en déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP dans ce même état.
   b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$. En imposant que $\langle H\rangle = \hbar\omega$ et en écrivant la condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$, calculer $|C_0|^2$ et $|C_1|^2$
3) Le vecteur d'état normé $|\psi(0)\rangle$ n'étant défini qu'à un facteur de phase globale près, on fixe ce facteur de phase en prenant C_0 réel et positif. On pose $C_1 = |C_1| \exp i\theta_1$. En plus, de $\langle H\rangle = \hbar\omega$, on suppose que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculer θ_1.
4) $|\psi(0)\rangle$ étant ainsi déterminé, écrire $|\psi(t)\rangle$ pour t > 0 et calculer la valeur de θ_1 à l'instant t. En déduire la valeur moyenne $\langle X(t)\rangle$ de la position à l'instant t.

Mécanique Qua

Hamza ICHOU

$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2$, $\quad |\psi(0)\rangle = \sum C_n\,|\varphi_n\rangle$.

$\hat{H}\,|\varphi_n\rangle = E_n\,|\varphi_n\rangle$: E.V.P.

$E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$.

1) $|\psi(t)\rangle$:

$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$.

$U(t,t_0) = \exp\left(-i\,\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)$.

$U(t,t_0)\,|\psi(0)\rangle = \overline{\exp\left(-i\,\frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)\sum_n C_n\,|\varphi_n\rangle}$.

$= \sum_n C_n\,\exp(-i\,\hat{H}t/\hbar)\,|\varphi_n\rangle$

$$\hat{H}|\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle.$$

$$\exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)|\varphi_n\rangle = \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right)|\varphi_n\rangle$$

$$= \exp\left(-i\,\omega\,(n + 1/2)\,t\right)|\varphi_n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n\, e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}\,|\varphi_n\rangle.$$

* 2)

$$\hat{H} \longrightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle} \longrightarrow E_n > 2\hbar\omega.$$

$P(E_n > 2\hbar\omega)$?)

$$P(\underline{E_n >} 2\hbar\omega) = 1 - \underline{\underline{P(E_n \leq 2\hbar\omega)}}$$

$$E_n > 2\hbar\omega \Rightarrow \cancel{\hbar\omega}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) > 2\cancel{\hbar\omega}$$

$$\rightarrow n > 2 - 1/2$$

$$n > \tfrac{3}{2} \Rightarrow \underline{n =} \underline{2}, 3, 4, \ldots, \infty.$$

$$E_n \leq 2\hbar\omega_0 \Rightarrow n \leq \tfrac{3}{2} = 1. \Rightarrow \underline{n = 1, 0}.$$

$$P(E_n > 2\hbar\omega) + P(E_n \leq 2\hbar\omega) = 1$$

$$P(E_n \leq 2\hbar\omega) \rightarrow P(E_0),\quad P(E_1)$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$n = 0 \rightarrow |\varphi_0\rangle$$

$$n = 1 \rightarrow |\varphi_1\rangle \qquad E_1 \rightarrow |\varphi_1\rangle$$

$$P(E_0) = |\langle\varphi_0|\psi(t)\rangle|^2 = |c_0|^2.$$

$$\langle\varphi_0| \sum c_n e^{x} |\varphi_n\rangle = \sum_n c_n (\,) \langle\varphi_0|\varphi_n\rangle$$

$$= c_0.$$

$$\delta_{0,n} \Rightarrow n = 0$$

$$P(E_1) = |\langle\varphi_1|\psi(0)\rangle|^2 = |c_1|^2.$$

$$P = P(E_n > 2\hbar\omega) = 1 - |c_0|^2 - |c_1|^2$$

Si $P = 0 = 1 - |c_0|^2 + |c_1|^2$

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = \underline{1}.$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum c_n \exp(\,) |\varphi_n\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \sum_n |c_n|^2 = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_k c_k^* \langle\varphi_k| \sum_n c_n |\varphi_n\rangle.$$

$$= \sum_{k,n} c_k^* \cdot c_n \cdot \underbrace{\langle \varphi_k | \varphi_n \rangle}_{\delta_{k,n}}$$

$$= 1 : k = n$$

$$= \sum_n c_n^* c_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

$$\underbrace{|c_0|^2 + |c_1|^2} + \overbrace{\dots + \dots + |c_n|^2}^{} = \underline{\underline{1}}$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad \geq$$

$c_0, \; c_1$: non null.

$$|\psi(0)\rangle = \underline{\underline{c_0}} \cdot |\varphi_0\rangle + \underline{\underline{c_1}} \cdot |\varphi_1\rangle \quad ✓✓$$

$$|\psi(t)\rangle$$

3) $\langle X \rangle_{|\psi(0)\rangle}$

$$\langle x \rangle = \langle \psi(0)| X |\psi(0)\rangle$$

$$=$$

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a^+ + a \right)$$

$$\langle x \rangle = \langle \psi(0)| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^+ \right) |\psi(0)\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot \left(\underline{\langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle} + \underline{\langle \psi(0) | a^{+} | \psi(0) \rangle} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\{ \langle a \rangle + \langle a^{+} \rangle \right)$$

$$\langle a \rangle = \left(c_0^{*} \langle \varphi_0 | + c_1^{*} \langle \varphi_1 | \right) a \left(c_0 | \varphi_0 \rangle + c_1 | \underline{\underline{\varphi_1}} \rangle \right)$$

$$\begin{cases} a | \varphi_n \rangle = \sqrt{n} \, | \varphi_{n-1} \rangle \\ a^{+} | \varphi_n \rangle = \sqrt{n+1} \, | \varphi_{n+1} \rangle . \end{cases}$$

$$a | \varphi_0 \rangle = 0 \, | \varphi_1 \rangle = 0$$

$$a | \underline{\underline{\varphi_1}} \rangle = \sqrt{1} \, | \varphi_2 \rangle .$$