Exercice 3

jeudi 27 avril 2023 19:09

Thermodynamique I — Hamza ICHOU — In Sciences

Exercice 3 **FS Casablanca 1986**

Les problèmes I et II sont indépendants .

Partie I

1) Écrire l'expression de la quantité δQ mise en jeu par υ moles d'un fluide homogène monophasé au cours d'une transformation réversible élémentaire :
   a) En fonction des variations dT et dV de la température et du volume.
   b) En fonction des variations dT et dP de la température et de la pression.
2) En déduire que :
   a) $h = -\upsilon\,(C_{MP} - C_{MV})\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$
   b) $C_{MP} - C_{MV} = \frac{TV\alpha^2}{\upsilon\chi_T}$. On donne : $h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$
3) Cas d'un gaz parfait :
   a) Calculer h et $C_{MP} - C_{MV}$
   b) Établir la relation entre T et P que vérifie un tel gaz au cours d'un processus réversible adiabatique. On supposera que C_{MP} est indépendante de T et l'on posera $\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}}$
   c) Calculer, à l'aide du 1^{er} principe de la thermodynamique, le travail adiabatique W qu'il faudrait dépenser pour comprimer υ moles de ce gaz de l'état (P_i, V_i, T_i) à l'état (P_f, V_f, T_f).

Partie II

Assimilons l'air atmosphérique à un gaz parfait diatomique, de masse molaire $M = 29$ g et de rapport $\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = 1,4$ dans tout le domaine de la température. On notera par P, ρ et T, la pression, la masse volumique et la température de l'air à l'altitude z et on donne : à z=0, $P_0 = 10^5$ Pa, $T_o = 300$K.

1) Montrer, à l'aide de l'équation de la statique des fluides reliant dP à dz, que la différentielle de la pression est donnée par la relation

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz \text{(E)}$$

2) Aux altitudes comprises entre $z = 0$ et $z = 10$ km (TROPOSPHÈRE) des mouvements ascendants, et descendants de grandes masses d'air se produisent continuellement. Ces masses d'air se détendent et se refroidissement lorsqu'elles s'élèvent; elles se compriment et se réchauffent lorsqu'elles descendent.
   a) En supposant ce processus réversible et adiabatique, montrer qu'à l'aide de l'équation (E) et de l'équation différentielle reliant $\frac{dT}{T}$, et $\frac{dP}{P}$, que la température T est fonction linéaire de l'altitude z : $T = T_0 - Kz$ où $K = -\frac{dT}{dz}$ = constante positive à déterminer numériquement. On donne pour cela : $R = 8,32$ JMole^{-1} K^{-1} et $g = g_o = 10$ m/s^2.
   b) Intégrer l'équation différentielle (E) et donner l'expression de P à toute altitude z. (On supposera que g = cste pour $z \leq 10$KM).
   c) A.N : Calculer P et n, la pression et la densité moléculaire à l'altitude $z = 10KM$. On donne : $N = 6.10^{23}$.

Partie I : υ mol , reversible.

1°)

$$\delta Q = \begin{cases} \upsilon C_p\, dT + h\, dP & (1) \\ \upsilon C_v\, dT + \ell\, dV & (2) \\ \lambda\, dP + \mu . dV \end{cases}$$

2°) a)

$$h = -\upsilon . (C_{Mp} - C_{M,v}) . \frac{\partial T}{\partial P}\Big|_V$$

$$* \; dP = \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V dT + \frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T dV.$$

$$\delta Q = \left(\upsilon C_{Mp} + h . \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V\right) dT$$

$$+ h \cdot \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_T \, dV$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta Q &= \nu \cdot C_{MV} \, dT + \ell \, dV . \\ \delta Q &= \left(\nu C_{Mp} + h \frac{\partial p}{\partial T} \right) dT + h \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) dV \end{aligned} \right.$$

$$\nu C_{MV} = \nu C_{Mp} + h \cdot \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V$$

$$\nu \left(C_{Mp} - C_{MV} \right) = - h \cdot \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V$$

$$\boxed{h = - \nu \left(C_{Mp} - C_{MV} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V}}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V} = \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_V$$

b°) $\alpha_V = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p$ $\quad h = -T \cdot \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p$ $\quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p = \alpha \cdot V .$

$\chi_T = - \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \rightarrow \frac{\partial V}{\partial p} = - \chi_T \cdot V \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{1}{- \chi_T \cdot V}$

$$C_p - C_V = - \frac{h}{\nu} \times \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V = + \frac{T}{\nu} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p \times \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V \times \frac{\partial V}{\partial V}$$

$$= \frac{T}{\nu} \cdot \alpha V \cdot \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V = \frac{T}{\nu} \cdot \alpha \cdot V \cdot \frac{\partial p}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial T}$$

$$= \frac{T}{\nu} \cdot \alpha^2 \cdot V^2 \cdot \left(- \frac{1}{\cancel{V} \cdot \chi_T} \right)$$

$$\| \; C_p - C_V = - \frac{T}{\nu} \cdot \frac{\alpha^2}{\chi_T} \; \|$$

Partie II : Donnée : air GP ;

$M = 29 g$.

$\gamma = 1.4$.

$z = 0$; $P_0 = 10^5$ Pa ; $T_0 = 300 K$.

1°)

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}\, dz. \qquad (E).$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho . g. \qquad (E.F.H).$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{RT}{P}} = \frac{MP}{RT}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MP}{RT} . g .$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} g . dz .$$

$\rho = cte$: (fluide incompressible) :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g .$$

$$\int_{P_0}^{P_1} dP = -\rho g . \int_{z_0}^{z_1} dz .$$

$$P_1 - P_0 = -\rho g (z_1 - z_0)$$

$$\| P_1 = P_0 + \rho g h . \| \qquad (h = z_0 - z_1)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz .$$

* adiabatique rev : $\delta Q = 0$.

$$c_p \, dT + h \, dp = 0$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} R \, dT - v \, dp = 0$$

$$dT - \frac{\gamma-1}{\gamma R} \cdot v \, dp = 0$$

$$dT - \frac{\gamma-1}{\gamma \cdot \cancel{R}} \cdot \cancel{R}T \frac{dp}{p} = 0$$

$$p \, dT - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot T \, dp = 0$$

$\div \; p \cdot T$:

$$\frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{p} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \cdot dz$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{dT}{T}$$

$$+\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{\cancel{T}} = +\frac{Mg}{R\cancel{T}} dz \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{Mg}{RT}$$

$$\int_{T_0}^{T} dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R} \int_{z_0}^{z} dz$$

$$T - T_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R} (z - z_0)$$

$$T = T_0 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R}\right) z$$

$$dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R} dz$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R}$$

$$k = -\frac{dT}{\ } = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R}$$

$$k = -\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R}.$$

1) $\rho = cte$: incompressible :

$$p(z) = p_0 + \rho g h$$

2) isotherme :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz. \qquad (T = T_0)$$

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\int_{z_0}^{z} \frac{Mg}{RT_0} \cdot dz$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{Mg}{RT_0} \cdot (z - z_0)$$

$$\frac{p(z)}{p_0} = \exp\left(-a(z - z_0)\right)$$

3) $T = T_0 - k \cdot z$.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - kz)} dz.$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - kz)}\, dz \, .$$

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{Mg}{R.k} \frac{d(T_0 - kz)}{T_0 - kz}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = + \frac{Mg}{R.k} \cdot \ln\left(\frac{T_0 - kz}{T_0}\right)$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = + \ln\left(1 - \frac{k}{T_0} \cdot z\right)^{\frac{Mg}{R.k}}$$

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left(1 - \frac{k}{T_0} z\right)^{Mg/R.k}$$

$$k = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R}$$

$$\frac{Mg}{R.k} = \frac{\cancel{Mg}}{\cancel{R} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\cancel{Mg}}{\cancel{R}}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\left\| \; p(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \; \right\|$$