espace produit tensoriel

soient $\mathcal{E}_p$ et $\mathcal{E}_q$ de dimension q et p

$$\mathcal{E}_p = \{ |u_k\rangle \}$$

$$\mathcal{E}_q = \{ |v_\ell\rangle \}$$

$$\mathcal{E}_{pq} = \{ |u_k\rangle \otimes |v_\ell\rangle \}$$

particule 1 : $\rightsquigarrow \mathcal{E}_q$

particule 2 : $\rightsquigarrow \mathcal{E}_p$

$$\mathcal{E}_{pq} = \mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_q$$

$$\dim \mathcal{E}_{pq} = \dim \mathcal{E}_p \times \dim \mathcal{E}_q$$

$$= p \cdot q$$

Produit tensoriel des opérateurs :

$A \in \mathcal{E}_p$ $\qquad A|\psi_p\rangle$ ✓ $\qquad |\psi_p\rangle \in \mathcal{E}_p$.

$B \in \mathcal{E}_q$ $\qquad B|\varphi_q\rangle$. $\qquad |\varphi_q\rangle \in \mathcal{E}_q$

$$C = A \otimes B \in \mathcal{E}_{pq}$$

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\mathcal{E}_p} \otimes \underbrace{|\varphi\rangle}_{\mathcal{E}_q} = |\psi\varphi\rangle = |\psi\rangle$$

$$C|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = (A \otimes B)\,|\psi\rangle|\varphi\rangle = \left(A|\psi\rangle\right) \otimes \left(B|\varphi\rangle\right)$$

$\underline{\underline{\text{si}}}$ $\begin{cases} \mathcal{E}_p = \{|\psi\rangle\} \\ \mathcal{E}_q = \{|\varphi\rangle\} \end{cases}$

$C|\psi\rangle$ ✗

$C|\varphi\rangle$ ✗

$$\mathcal{E}_{pq} = \{ |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \}$$

prté :
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

vecteurs et valeurs propres :

Soit A un opérateur linéaire. si $|\psi\rangle$ est tq.

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

- On dit que $|\psi\rangle$ est vecteur propre de A et λ est valeur propre
- l'ensemble des v. propres de A constitue le spectre de A.
- $A|\psi\rangle = \lambda . |\psi\rangle$ $\quad$ λ est deux fois dégénéré.
  $A|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$

prté :
$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \text{ vect propre } *$$
$$A|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi\rangle \quad \text{" } \quad \text{" } \quad * *$$

$\hookrightarrow |\Phi\rangle = \alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle$ vect propre de A $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

$$A|\Phi\rangle = A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) = \alpha A|\psi\rangle + \beta A|\varphi\rangle.$$

$$= \lambda(\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle)$$

$$A|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle \quad : \quad |\Phi\rangle \text{ vect propre}$$

Exemple $\quad$ fonction d'onde.

$$\begin{cases} f(x) = \exp(-ax) \\ A = \dfrac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$A.f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-ax})$$

$$A f(x) = -a . e^{-ax}$$

$$A f(x) = -a \, f(x)$$

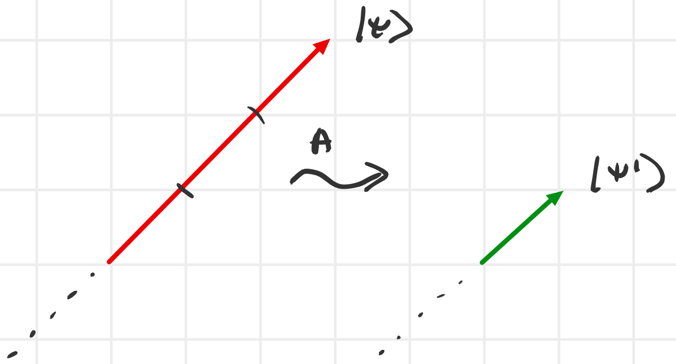
e^{-ax} est fonction propre de $A = \frac{\partial}{\partial x}$.

$$\begin{cases} g(x) = e^{-ax^2} \\ A = \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$A\, g(x) = \underbrace{-a.x.\, e^{-ax^2}}_{h(x)}$$

$g(x)$ n'est pas fonction propre.

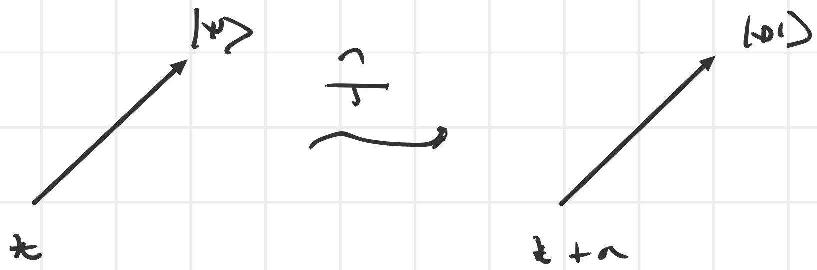
Ex. Vecteur :



$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle = \frac{1}{3}|\psi\rangle$

$A|\psi\rangle = \frac{1}{3}|\psi\rangle$

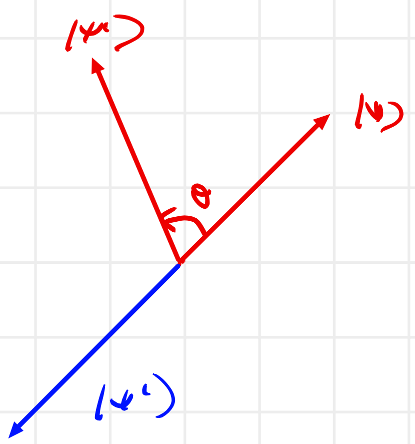
$\hat{T}$: Translation.



$|\psi'\rangle = \hat{T}|\psi\rangle = |\psi\rangle$

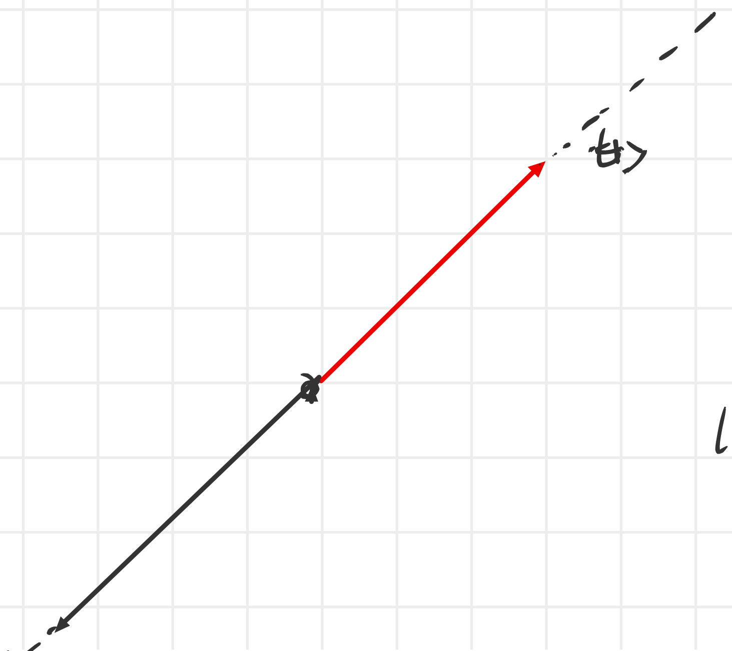
$\hat{T}|\psi\rangle = |\psi\rangle$

Rotation de $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:



$|\psi'\rangle = R(\theta)|\psi\rangle = |\psi\rangle$

$|\psi'\rangle = -|\psi\rangle$



$|\psi'\rangle = -|\psi\rangle$

$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle = -|\psi\rangle$

opérateurs hermitiques.

Théorème 1 : Toutes les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles.

Démo :

$$A|\Phi_n\rangle = a_n|\Phi_n\rangle \quad *$$

$$\langle\Phi_n|A^\dagger = \langle\Phi_n|\, a_n^* \quad **$$

$\langle\Phi_n|$ $\qquad \langle\Phi_n|A|\Phi_n\rangle = \langle\Phi_n|\, a_n|\Phi_n\rangle$

$|\Phi_n\rangle$ $\qquad \langle\Phi_n|A^\dagger|\Phi_n\rangle = \langle\Phi_n|\, a_n^*|\Phi_n\rangle$

$A = A^\dagger$ $\qquad \begin{cases} \langle\Phi_n|A|\Phi_n\rangle = a_n \langle\Phi_n|\Phi_n\rangle \\ \quad \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel \\ \langle\Phi_n|A|\Phi_n\rangle = a_n^* \langle\Phi_n|\Phi_n\rangle \end{cases}$

$$a_n = a_n^*$$

$a_n \in \mathbb{R}$ $\qquad (z = z^* \quad z \in \mathbb{R})$

Théorème 2 : Deux vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

$|\Phi_n\rangle$ $\quad |\Phi_m\rangle$ ayant des valeurs propres a_n et a_m.

$$A|\Phi_n\rangle = a_n|\Phi_n\rangle \quad *$$

$**$ $\quad A|\Phi_m\rangle = a_m|\Phi_m\rangle \rightsquigarrow \langle\Phi_m|A^\dagger = a_m^* \langle\Phi_m|$

$$\langle \Phi_m | A | \Phi_n \rangle = a_n \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle$$
$$\langle \Phi_m | A^+ | \Phi_n \rangle = a_m^* \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle .$$

$$a_n \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = a_m^* \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle$$

$$(a_n - a_m^*) \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = 0$$

a_n et a_m sont distincts (par hypothèse).

$$\langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = 0$$

$|\Phi_m\rangle$ et $|\Phi_n\rangle$ sont orthogonaux.

observable :

un observable est un opérateur hermitique dont le système de vecteurs propres $\{ |u_n^\alpha\rangle \}$ est non seulement orthonormé mais complet.

$$\langle u_{n'}^{\alpha'} | u_n^\alpha \rangle = \delta_{nn'} \cdot \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\sum_\alpha \sum_n |u_n^\alpha\rangle \langle u_n^\alpha| = \mathbb{1} .$$

Exemple de observables :

1. Projecteur :

$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ est hermétique

$$P^+_{|\psi\rangle} = (|\psi\rangle\langle\psi|)^+ = |\psi\rangle\langle\psi| = P_{|\psi\rangle}$$

$$P^2_{|\psi\rangle} = (|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = |\psi\rangle\langle\psi| \cdot |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_{|\psi\rangle}$$

λ : val. propre de $\underline{P_{|+\rangle}}$

$\lambda = \lambda^2$

λ^2 : " " $\underline{P^2_{|+\rangle}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{array} \right.$

Exercice 2.2. Opérateurs hermitiens

> Sur l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable, à valeurs complexes $f(x)$ de la variable réelle x, on définit un produit scalaire :
>
> $$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx \tag{1}$$
>
> **1.** Calculer l'opérateur adjoint de l'opérateur X défini par : $Xf = xf$. Cet opérateur est-il hermitien ?
>
> **2.** Calculer l'opérateur adjoint de d/dx. L'opérateur id/dx est-il hermitien ?
>
> **3.** Montrer que l'opérateur laplacien est hermitien.

1. $X f = x \cdot f(x)$

$A = X$: $\langle X f, g\rangle = \langle f, X^{+} g\rangle$

$$\langle Xf, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x f(x))^* \cdot g(x)\, dx \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$= \int x \cdot f^*(x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int f^*(x) \cdot x \cdot g(x)\, dx \qquad Xg = x \cdot g(x)$$

$$= \langle f, Xg\rangle = \langle f, X^{+} g\rangle$$

$X^{+} = X$: donc hermitique.

2) $A = \dfrac{d}{dx}$

$$\langle \frac{d}{dx} f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} f\right)^* g(x)\, dx$$

$$= [f^* g] - \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \frac{dg}{dx}\, dx$$

$$\langle \frac{d}{dx} f, g \rangle = + \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \left(-\frac{d}{dx}\right) g(x)$$

$$= \langle f, -\frac{d}{dx} g \rangle .$$

$$\langle A f, g \rangle = \langle f, A^\dagger g \rangle$$

$$A^\dagger = -\frac{d}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \sim -\frac{d}{dx}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx}.$$

$$\left(i \frac{d}{dx}\right)^\dagger = (i)^\dagger \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger$$

$$= -i \left(-\frac{d}{dx}\right)$$

$$\left(i \frac{d}{dx}\right)^\dagger = i \frac{d}{dx}$$

$i \frac{d}{dx}$. est hermitique

3) le produit de deux operateurs hermitiens qui commuttent est un operateur hermitien.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA. = AB.$$

$[A, B] = 0 = AB - BA \Rightarrow AB = BA$

$A = i \dfrac{d}{dx}$; / $B = i \dfrac{d}{dx}$

$\left(i \dfrac{d}{dx}\right) \times \left(i \dfrac{d}{dx}\right) = \left(i \dfrac{d}{dx}\right)^2 = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ ✓

$-\dfrac{\partial}{\partial x^2}$: est hermitien.

de m^ par $\dfrac{\partial}{\partial x^2}$. idem $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow i \dfrac{\partial}{\partial z}$

$\downarrow$

$i \dfrac{\partial}{\partial y} \rightarrow$ hermitien

$\Rightarrow \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$: est hermitien.

→ **Exercice 2**

Soient A, B et C trois opérateurs linéaires définis ...

Soient A, B et C trois opérateurs linéaires définis dans l'espace des états.

1) Montrer que l'on a $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.

2) Montrer aussi que si on a $[B, [A, B]] = 0$ alors :

a) $[A, B^k] = k[A, B]B^{k-1}$

b) Soit F une fonction de l'opérateur B, montrer que dans ces conditions $[A, F(B)] = [A, B]\frac{\partial F}{\partial B}$.

1°) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

$[A, B] = AB - BC$

$[A, B] = 0 \quad (AB = BA)$.

$B[A, C] + [A, B]C = B(AC - CA) + (AB - BA).C$

$= B\cancel{A}C - BCA + ABC - B\cancel{A}C$

$= ABC - BCA$

$= [A, BC]$. (cqfd)

Exp. $[X, P^2] = [X, P.P]$ (A B C)

$= P[X, P] + [X, P]P$.

$[X, P^2] = 2i\hbar P$.

2) Si $[B, [A, B]] = 0$ alors: $[A, B^k] = k.[A, B].B^{k-1}$

$k = 1$. $[A, B^1] = 1[A, B].B^0 = [A, B]$ ✓

on suppose q'il est verifier pour $k-1$ et le demontrer pour k.

$[A, B^{k-1}] = (k-1)[A, B].B^{k-2}$ ✓ ✓

$[A, B^k] = k\,[A, B]\,B^{k-1}$ ✓

$$[A, B^k] = [A, B^{k-1} \cdot B] = B^{k-1}[A,B] + [A, B^{k-1}] \cdot B.$$

$$[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C$$

$$[A, B^k] = B^{k-1} \cdot [A,B] + [A, B^{k-1}] \cdot B$$

$$= B^{k-1}[A,B] + (k-1)[A,B] \cdot B^{k-2} \cdot B$$

$$= B^{k-1}[A,B] + k [A,B] \cdot B^{k-1} - [A,B] \cdot B^{k-1}$$

$$= k [A,B] B^{k-1} + [\underbrace{B^{k-1}, [A,B]}_{=0}]$$

$$[A, B^k] = k [A,B] \cdot B^{k-1} \quad \checkmark$$

b)

$$F(A) = \sum_n a_n \cdot A^n$$

$$F(B) = \sum_n b_n B^n$$

$$[A, F(B)] = [A,B] \cdot \frac{\partial F}{\partial B} \quad \checkmark$$

$$[A, F(B)] = [A, \sum_n b_n B^n].$$

$$= \sum_n b_n [A, B^n].$$

$$= \sum_n n\, b_n \cdot [A,B] \cdot B^{n-1}$$

$$= [A,B] \sum_n n b_n B^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B}\left(\sum b_n B^n\right) = \sum_n b_n \cdot n \cdot B^{n-1}$$

$$[A, F(B)] = [A,B] \cdot \frac{\partial F}{\partial B}.$$

$$* \quad [\underline{P}, \underline{\underline{V}}(x)] = [P, x] \frac{\partial V}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Exercice 2

Soient deux quantités physiques décrites par les opérateurs hermitiques A et B.

1) En écrivant le commutateur de A et B sous la forme :

$$[A, B] = iC \qquad (1)$$

montrer que C est un opérateur hermitique.

2) En considérant le vecteur $|\varphi> = (A + i\lambda B)|\psi>$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et en écrivant que le carré de sa norme est positif ou nul, montrer que les trois opérateurs A, B et C obéissent à la relation :

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \ \geq \ \frac{1}{4} \langle C \rangle^2$$

3) On considère les opérateurs A' et B' tel que A' = A - <ψ|A|ψ> et B' = B - <ψ|B|ψ>, montrer que A' et B' sont hermitiques et qu'ils vérifient la relation (1)

Déduire la relation d'incertitude d'Heisenberg sur ces deux observables :

$$\Delta A . \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

1) $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$

$$[A, B]^\dagger = (iC)^\dagger$$

mq. $C = C^\dagger$.

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger$$

$$= B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger$$

$$= BA - AB = -[A, B]$$

$$[A, B]^\dagger = -i\, C^\dagger$$

$$+[A, B] = +i\, C^\dagger$$

$$\cancel{i}\, C^\dagger = \underline{[A, B]} = \underline{\cancel{i}\, C}$$

$$C^\dagger = C$$

C : est hermitique. (val propres sont réelles + vect propres ⊥)

2) $|\varphi\rangle = (A + i\lambda B)|\psi\rangle.$

$\langle\varphi|\varphi\rangle$

$$|\varphi\rangle \rightsquigarrow \langle\varphi| \quad (i)$$

$$A \rightsquigarrow A^{+}$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda^{*}$$

$$|\varphi\rangle = (A + i\lambda B)\,|\psi\rangle$$

$$\rightsquigarrow |\psi\rangle\,(A + i\lambda B)$$

$$\rightsquigarrow \langle\psi|\,(A + i\lambda B).$$

$$\rightsquigarrow \langle\psi|\,(A^{+} + i\lambda B^{+})$$

$$\langle\varphi| = \langle\psi|\,(A^{+} - i\lambda B^{+})$$

$$\langle\varphi|\underline{\varphi}\rangle = \underline{\underline{\langle\psi|}}\,(A^{+} \underline{-i\lambda B^{+}})\cdot(A + i\underline{\lambda} B)\cdot\underline{\underline{|\psi\rangle}}$$

$$= \langle\psi|\,\underline{\underline{A^{2}}} - i\lambda\,(AB - BA) + \lambda^{2}B^{2}\,|\psi\rangle$$

$$\downarrow$$

$$= \langle\psi|A^{2}|\psi\rangle - \lambda\,\langle\psi|C|\psi\rangle$$

$$+ \lambda^{2}\,\langle\psi|B^{2}|\psi\rangle$$

$$\vee \quad \langle\varphi|\varphi\rangle = \underbrace{\langle A^{2}\rangle}_{c} - \lambda\underbrace{\langle C\rangle}_{b} + \lambda^{2}\underbrace{\langle B^{2}\rangle}_{\underline{\underline{a}}} \geq 0 \qquad \langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

$$\Delta = b^{2} - 4a\cdot c$$

$$\Delta = \langle C\rangle^{2} - 4\,\langle A^{2}\rangle\,\langle B^{2}\rangle \leq 0$$ (signe du polynôme est le signe de

$$\langle A^{2}\rangle\cdot\langle B^{2}\rangle \geq \frac{1}{4}\cdot\langle C^{2}\rangle.$$ (cqfd)

3) $A' = A - \langle\psi|A|\psi\rangle$

$B' = B - \langle\psi|B|\psi\rangle$

$A'^{\dagger} = A^{\dagger} - \left(\langle\psi|A|\psi\rangle\right)^{\dagger}$ $\qquad\qquad \left(\langle\psi|A|\psi\rangle\right)^{\dagger} = \langle\psi|A^{\dagger}|\psi\rangle$

$= A - \langle\psi|A^{\dagger}|\psi\rangle$

$= A - \langle\psi|A|\psi\rangle = A'$

$A'^{\dagger} = A'$ $\qquad$ idem pour B'.

$[A', B'] = [A + \langle\psi|A|\psi\rangle, B + \langle\psi|B|\psi\rangle]$.

$= (A + \langle A\rangle)(B + \langle B\rangle) - (B + \langle B\rangle)$

$(A + \langle A\rangle)$.

$= AB + \cancel{\langle B\rangle A} + \cancel{\langle A\rangle B} + \cancel{\langle A\rangle\langle B\rangle}$

$- (BA + \cancel{B\langle A\rangle} + \cancel{\langle B\rangle A} + \cancel{\langle A\rangle\langle B\rangle})$

$= [A, B]. = iC$

$[A', B'] = iC$

$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle C\rangle$

$\langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \geq \frac{1}{4}\cdot\langle C\rangle$

$\langle A'^2\rangle^{1/2} = \Delta A.$ $\qquad$ $\langle B'^2\rangle^{1/2} = \Delta B$

$\underline{\Delta A} \cdot \underline{\Delta B} \geq \frac{1}{2}\langle[A, B]\rangle.$

Exercice 3

Soit un opérateur linéaire A ayant un vecteur propre $|\varphi>$ avec la valeur propre a. soit un deuxième opérateur linéaire B tel que $[A , B]= B + 2BA^2$

Montrer que $(B|\varphi>)$ est vecteur propre de A avec la valeur propre qu'on déterminera.

a) $A|\varphi\rangle = a \cdot |\varphi\rangle$: E v p.

$[A, B] = B + 2BA^2$

$B|\varphi\rangle = |\psi\rangle \rightsquigarrow A|\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$

$A(B|\varphi\rangle) = \lambda (B|\varphi\rangle)$

$[A, B]|\varphi\rangle = (B + 2BA^2)|\varphi\rangle$

$(AB - BA)|\varphi\rangle = B|\varphi\rangle + 2BA^2|\varphi\rangle$

$AB|\varphi\rangle - BA|\varphi\rangle = B|\varphi\rangle + 2Ba^2|\varphi\rangle$.

$AB|\varphi\rangle - a \cdot B|\varphi\rangle = B|\varphi\rangle + 2a^2 B|\varphi\rangle$

* $A(B|\varphi\rangle) = (a + 1 + 2a^2) B|\varphi\rangle$.

$A|\psi'\rangle = \lambda |\psi'\rangle$ $|\psi'\rangle = B|\varphi\rangle$

* $B|\varphi\rangle$ est $\vec{\text{vect}}$ propre de A avec la val propre : $a + 1 + 2a^2$

1°)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & i & 2 \end{pmatrix}^{*}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left({}^{t}A\right)^{*}$$

• 2) * la 1re n'est pas hermitique car l'un des éléments de la diagonale n'est pas réel.

* le deuxième est hermitique car : les éléments de la diagonale sont réels. + les éléments symétriques /r à la diagonal sont complexes conjugués.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 2 & 0 \\ -2i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ Hermitique.

$$\boxed{A^{\dagger} = A}$$

Exercice 5

1) Calculer l'adjoint de l'opérateur correspondant à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Lesquelles des matrices suivantes correspondent à des opérateurs hermitiques ? Justifiez votre réponse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

3) On considère un espace des états engendré par la base orthonormée {|1>, |2>, |3>}. Deux kets |α> et |β> sont représentés par :

|α> = i|1> - 2|2> -i|3> |β> = i|1> + 2|3>

a) Donner l'expression des bras <α| et <β| dans la base duale {<1|, <2|, <3|}.
b) Calculer <α|β> et <β|α>. Conclure.
c) Trouver l'expression matricielle de l'opérateur A = |α><β|. Est-il hermitique ?

3)

$$\varepsilon = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$$

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$|\beta\rangle = i|1\rangle + 0|2\rangle + 2|3\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a)

$$\langle\alpha| = -i\langle 1| - 2\langle 2| + i\langle 3| = \begin{pmatrix} -i & -2 & i \end{pmatrix}$$

$$\langle\beta| = -i\langle 1| + 2\langle 3| = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \begin{pmatrix} -i & -2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= +1 + 0 + 2i = 1 + 2i$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 0 - 2i = 1 - 2i$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

c)

$$A = |\alpha\rangle\langle\beta| = \underbrace{\begin{pmatrix} +i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}}_{(3\times 1)} \underbrace{\begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{(1\times 3)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$