Les intégrals généralisés :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt \qquad \int_a^{b} f(t)\,dt$$

f : continue sur $]a,b)$ $(a,b[$, $]a,b[$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt :}$$

Convergence / Divergence :

1. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si la limite, lorsque $x \to +\infty$, existe et finie.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt = \ell$$

on dit alors que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (diverge).

2. f continue sur $]a,b)$.

$$\int_a^{b} f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^{b} f(t)\,dt = \ell$$

on dit que $\int_a^{b} f(t)\,dt$ CV.

Exemple : (en appliquant la définition)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} \quad \text{converge.}$$

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ continue par morceaux (localement intégrable) sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{x} \frac{dt}{t^2+1} = [\mathrm{Arctg}(t)]_0^{x} = \mathrm{Arctg}(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

- $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{t+1}$ (diverge) . $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$ CPM sur $[0,+\infty[$. le seul point impropre est $+\infty$.

$$\int_0^{x} \frac{dt}{t+1} = \Big(\ln|t+1|\Big)_0^{x} = \ln(x+1)$$

or $\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

- $\int_0^{1} \ln(t)\,dt$: CV $t \mapsto \ln(t)$ est CPM sur $]0,1]$. le point incertain est "0"

- $\int_0 \ln(t)\,dt$: CV $\quad t \mapsto \ln(t)$ est CPM sur $]0,1]$. le point incertain est "0"

$$\int_x^1 \ln(t)\,dt = [t.\ln(t) - t]_x^1 = -1 - (x\ln(x) - x)$$

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \ln(t)\,dt = -1 \quad (\text{fini}).$$

Relation de Chasles :

$f : [a,+\infty[$ $\quad f$ CPM et $a' \in [a,+\infty[$

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

$$\underset{\text{CV / div}}{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt} = \underset{\text{CV}}{\int_a^{a'} f(t)\,dt} + \underset{\text{CV / div}}{\int_{a'}^{+\infty} f(t)\,dt}$$

Cas de deux points incertains :

$\begin{cases} \text{Soient } a,b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ avec } a<b. \\ f :]a,b[\to \mathbb{R} \quad \text{CPM} \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ CV ssi $\exists c \in]a,b[$ tq :

$\int_a^c f(t)\,dt$ CV et $\int_c^b f(t)\,dt$ CV

Exemple :

$$\text{CV} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$\int_x^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_x^0 \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_x^0 \qquad \frac{f'}{f^n}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \int_x^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \lim_{-\infty} -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \lim_{-\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)_0^x$$

$$= \lim_{-\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)$$

$$= +\frac{1}{2}$$

Fonction positive (négative : garde un signe cst) :

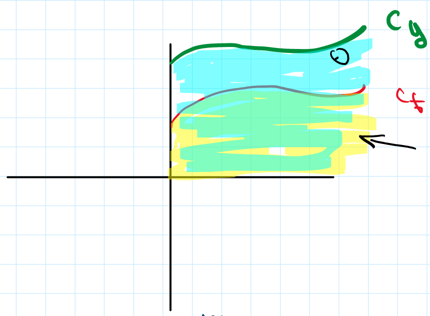
f et g sont deux f. CPM sur $[a,+\infty[$.

$f \leq g$

$\Rightarrow$

① $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ cv alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ cv

② $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ div alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ div



Exemple : $\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-t}\,dt$? $\qquad f(t) = t^{\alpha}\cdot e^{-t}$

$$t^{\alpha}\cdot e^{-t} = t^{\alpha}\cdot e^{-t/2}\cdot e^{-t/2}$$

- $\lim\limits_{+\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-t/2} = 0$ (l'exponentiel l'emporte sur la puissance)

$\exists A > 0$ tq $\forall t \geq A$: $t^{\alpha}\cdot e^{-t/2} \leq 1$

$$t^{\alpha}\cdot e^{-t/2}\cdot e^{-t/2} \leq e^{-t/2}$$

$$t^{\alpha} e^{-t} \leq e^{-t/2}$$

$$\int_1^{x} e^{-t/2}\,dt = -2\cdot e^{-t/2}\Big|_1^{x} = -2\cdot e^{-x/2} + 2\cdot e^{-1/2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} e^{-t/2}\,dt = 2e^{-1/2}$$

donc. $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}\,dt$ cv $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-t/2}\,dt$ cv

Théorème d'équivalence :

f et g CPM positive (négative) sur $[a,+\infty[$

On supp que $f \underset{+\infty}{\sim} g$ $\left(\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\right)$

alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature.

Exemple : $\int^{+\infty} t^5 + 3t + 1 \cdot e^{-t}\,dt$ (CV)

Exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5+3t+1}{t^2+4} \cdot e^{-t}\, dt \quad (CV)$$

$$\frac{t^5+3t+1}{t^2+4} = \frac{t^5\left(1+\frac{3}{t^4}+\frac{1}{t^5}\right)}{t^2\left(1+\frac{4}{t^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^5}{t^2} = t^3.$$

$$\frac{t^5+3t+1}{t^2+4} \cdot e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^3 \cdot e^{-t}$$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\, dt$ CV

Integrals de Riemann :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$\alpha \neq 1$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{-\alpha+1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \lim_{+\infty}\left(\frac{1}{-\alpha+1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$ existe si $\alpha-1>0$

$\alpha > 1$

$\alpha = 1$: $\displaystyle\lim_{+\infty}\left[\ln(t)\right]_1^x = \lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$ (div)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{CV si } \alpha > 1$$

div si $\alpha \leq 1$

Integrals de Bertrant :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln'(t)}{(\ln(t))^\beta}$$

$\beta \neq 1$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{-\beta+1} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{-1+\beta}}\right]$ fini . $-1+\beta>0$

$\beta = 1$: $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t\ln(t)} = \left[\ln(\ln(t))\right]_2^x$

$= \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$

$\underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^\beta} \quad \text{CV si } \beta > 1.$$

Application :

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+1} \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \sin^2\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$$

$*$ $\sqrt{t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} t$

$$* \quad \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}$$

$$* \quad \sin^2\left(\frac{1}{\ln(t)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln(t)}\right)^2$$

$$\sqrt{t^2+1} \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \cdot \sin^2\left(\frac{1}{\ln(t)}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t\ln^2(t)}$$

or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2(t)}$ c'est un integral de Bertrand **CV** car $\beta = 2 > 1$.

Fonction oscillante :

Integrale absolument Convergent.

$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est **absolument CV.** si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est convergent. ✓

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$

$$|\sin(t)| \leqslant 1$$

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ (Integral de Riemann $\alpha = 2 > 1$) CV donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt$

d'où la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$.

Integrale semi-Convergent :

$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est semi-convergent si elle est convergente mais pas absolument convergent.

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

$u' = \sin(t) \rightarrow u = -\cos(t)$

$v = \frac{1}{t} \rightarrow v' = -\frac{1}{t^2}$

$$\int_1^x \underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{u' \cdot v} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt.$$

$u' \cdot v$

$*$ $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{\cos(1)}{1} \right) = \cos(1)$ finie

$**$ $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \, dt$.

$\frac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV

CV $\Leftarrow$ CV

$*$ et $**$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est Convergent

$*$ $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$. ?! div.

$|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ $**$.

$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$

$\int_1^x \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \, dt$ $\left(u' = \cos 2t \text{ et } v = \frac{1}{t} \right)$

$u = \frac{1}{2} \sin(2t)$ et $v' = -\frac{1}{t^2}$

$= \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} \, dt$

$= \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2} \, dt$

$*$ infini $\quad$ $**$ fini. $\quad$ $***$ CV

$|\sin(2t)| \leq 1$

$\left| \frac{\sin(2t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$

CV $\Leftarrow$ CVA $\longleftarrow$ CV

Conclusion. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est semi-convergente.

Théorème Abel :

f : positive, décroissante ayant une limite en $+\infty$

g : est continue sur $[a, +\infty[$ + $\int g(t) \, dt$ soit borné.

$\int_a^{+\infty} f(t) g(t) \, dt$ Converge.

a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \;:=\; \int_1^{+\infty} \sin(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt \qquad \begin{cases} f(t) = \frac{1}{t} \\ g(t) = \sin(t) \end{cases}$$

alors d'après Abel est convergent.

$\int_a^b f(t)\,dt$ avec f continue PM sur $]a,b]$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \to \begin{cases} \text{CV ssi } \alpha < 1 \\ \text{div ssi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{-\ln(t)+1}{\sin(t)}}\,dt.$

$$\sqrt{\frac{-\ln(t)+1}{\sin(t)}} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{-\ln(t)}{t}} = \frac{(-\ln t)^{1/2}}{t^{1/2}}$$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{1/2}}{t^{1/2}}$ est CV $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est CV

$$\frac{-\ln^\alpha(t)}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{(-\ln(t))^\alpha}{\sqrt{t}} = (-\ln t)^\alpha \cdot t^{-1/2} = \left((-\ln(t))^\alpha \cdot t^{1/4}\right)\cdot t^{-3/4}.$$

or $\lim\limits_{0^+} t^{1/4}(-\ln(t))^\alpha = 0$ (Croissance comparée)

(les puissances de t l'emporte sur le logarithme).

$\forall t \in]0,\varepsilon]$ $\quad t^{1/4}\cdot(-\ln(t))^\alpha \leq 1$

$$t^{-3/4}\cdot(t^{1/4})\cdot(-\ln(t))^\alpha \leq \frac{1}{t^{3/4}}$$

CV $\leftarrow$ CV

or $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t^{3/4}}$ CV $\left(\alpha = \frac{3}{4} < 1\right)$.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{\ln t}}\,dt$ b) $\int_1^{+\infty} Arctan\,\frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}e^{\sin t}\,dt$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{t^4+1}{t^4\tanh t}\,dt$ e) $\int_1^{+\infty} \frac{t^2\,Arctan t}{1+t^2}\,dt$ f) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$

g) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ h) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t(t^4+1)}\,dt$

$t^2\sqrt{\ln(t)} \geqslant t^2$

$\frac{1}{t^2\sqrt{\ln(t)}} \leqslant \frac{1}{t^2}$

+∞ CV ⟵ CV

or $\int_2 \frac{dt}{t^2}$ $(\alpha = 2 \geqslant 1)$ CV

2) $\text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right) = \text{Arctg}(u) \underset{0}{\sim} u \qquad u = \frac{1}{\sqrt{2t}}$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}$

or $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{1/2}}$ div $(\alpha = 1/2 < 1)$ d'où la divergence.

$\int \frac{1}{t} e^{\sin(t)}\,dt$

$-1 \leqslant \sin(t) \leqslant +1$

$e^{-1} \leqslant e^{\sin(t)} \leqslant e^{+1}$

$\frac{e^{-1}}{t} \leqslant \frac{e^{\sin(t)}}{t} \leqslant \frac{e^{+1}}{t}$

$\frac{e^{\sin(t)}}{t} \geqslant \frac{e^{-1}}{t}$

div ⟵ div

Critère de Riemann :

+∞ : si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ et CPM

* si $\exists \alpha > 1$ tq : $\lim_{+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors : $\int f(x)\,dx$ CV
* si $\exists \alpha \leqslant 1$ tq $\lim_{+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\int f$ div

0 : si $f :]0, b] \to \mathbb{R}$ et CPM :

* si $\exists \alpha < 1$: $\lim_{x\to 0} x^\alpha f(x) = 0$ $\int f\,dx$ CV
* si $\exists \alpha \geqslant 1$: $\lim_{x\to 0} x^\alpha f(x) = +\infty$. $\int f\,dx$ div