Be In Sciences.org
+33 6 25524751

Exercice 1:
La forme différentielle $\delta f = 2xzdx + 4yzdy + (x^2+y^2)dz$, respectivement $\delta g = 2xzdx + 2yzdy + (x^2+y^2)dz$ est-elle exacte? Si oui calculer la fonction $f(x,y,z)$, respectivement $g(x,y,z)$.

$$\delta f = P(x,y,z)\,dx + \varphi(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

δf est D.T.E :

$$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x,z} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{y,z} \quad (i) \ ✓$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right| = \left.\frac{\partial R}{\partial x}\right| \quad (ii)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| = \left.\frac{\partial R}{\partial y}\right| \quad (iii) \ X$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left.\frac{\partial}{\partial z}(4yz)\right|_{y,x} = 4y\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}} = 4y.$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right|_{x,z} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^2)}_{0} + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y \neq$$

$$(y^2)' = 2y$$

Exercice 2:
On considère un gaz quelconque régi par une équation d'état de la forme $f(P,V,T)=0$.

Démontrer que $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$.

$$\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T = -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial P}} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial P}\right|_V = -\frac{\frac{\partial f}{\partial P}}{\frac{\partial f}{\partial T}}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P = -\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|}{\left.\frac{\partial f}{\partial V}\right|}$$

1 $$\frac{\partial P}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{\cancel{\frac{\partial f}{\partial V}}}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial P}}} \times \frac{\cancel{\frac{\partial f}{\partial T}}}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial V}}} \times \frac{\cancel{\frac{\partial f}{\partial P}}}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial T}}} = -1.$$

Exercice 3:

L'équation d'état d'une mole d'un gaz réel s'écrit

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

où a et b sont des constantes positives, et R est la constante des gaz parfaits.

1) Démontrer que la différentielle de la pression est donnée par :

$$dP = \frac{R}{V-b}dT + \left(\frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}\right)dV$$

2) Déterminer les coefficients thermoélastiques α et β en fonction de V et T.

3) Donner la relation liant les coefficients α, β et le coefficient de compressibilité isotherme χ_T. En déduire l'expression de χ_T en fonction de V et T.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad \| f(x,y) = 0 \|$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T \cdot dV + \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V \cdot dT .$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)\Big/_T$$

$$= \frac{\partial}{\partial V}_T\left(\frac{RT}{V-b}\right) - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{a}{V^2}\right)_T$$

$$= RT\,\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{V-b}\right) - a\,\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{V^2}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right\}\Big/_V$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{RT}{V-b}\right\} - \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{a}{V^2}\right\}$$

$$= \frac{R}{V-b} \cdot \cancel{\frac{\partial T}{\partial T}} - \frac{a}{V^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial T}\{1\}}_{=0} .$$

$$\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V = \frac{R}{V-b} .$$

$$\frac{\partial V}{\partial T}\Big)_P = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T}\Big|_V}{\frac{\partial f}{\partial V}\Big|_T} \qquad \frac{\partial f}{\partial T}\Big|_V = \qquad \frac{\partial f}{\partial V}\Big|_T$$

Exercice 4:

On considère un gaz dont les coefficients thermoélastiques α et χ_T sont données par

$\alpha = \dfrac{R}{RT + BP}$ et $\chi_T = \dfrac{RT}{P(RT + BP)}$

où R est la constante des gaz parfaits et B une constante positive.

1) En Déduire l'expression de β.

2) En intégrant l'expression de α, trouver la relation suivante : $V = (RT + BP)f(P)$ où $f(P)$ est une fonction de la pression.

3) Déterminer l'expression de χ_T en utilisant celle de V. En déduire que $f(P) = \dfrac{A}{P}$.