Séance 1 : Statique des fluides

vendredi 10 mars 2023 21:35

Be In Sciences.org

+33 6 25524751

2 Plan

3 Introduction

La ***Mécanique des Milieux Continus (MMC)*** a pour objet la modélisation mathématique des corps matériels (solides ou fluides) déformables. Elle constitue une matière scientifique fondamentale dont l'étude est indispensable pour aborder d'autres disciplines scientifiques et techniques plus spécialisées telles que :

- ❖ Mécanique des solides
- ❖ Calcul linéaire et non linéaire des structures,
- ❖ Mécanique des sols et des roches,
- ❖ Mécanique des fluides et l'hydraulique,
- ❖ Mécanique des phénomènes vibratoires,
- ❖ Mécanique lagrangienne

4

-La mécanique des fluides fait partie donc de la MMC et particulièrement de la mécanique des milieux déformables. Un milieu quelconque est caractérisé par un nombre adimensionnel dit de Knudsen $K_n = l/L$. Le milieu est dit continu si $K_n < 10^{-2}$.

Corps indéformables : la distance entre deux points reste la même constante au cours du mouvement.

Corps déformables : la distance entre deux points peut varier au cours du mouvement.

Un solide considéré comme corps déformable se distingue d'un fluide, aussi corps déformable, du fait que lorsque le solide dépasse une limite de déformation (élastique ou pastique) se détruit alors que la déformation du fluide est illimitée.

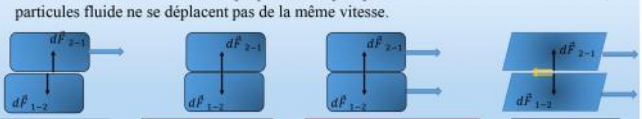
Un **fluide** est un milieu matériel parfaitement déformable. On regroupe sous cette appellation les liquides, les gaz.

Une **particule fluide** est un **paquet de molécules** contenues dans un volume. Le paquet est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de molécules. Ainsi il est suffisamment petit de telle sorte qu'on ne peut pas distinguer aucune hétérogénéité spatiale.

5 Propriétés des fluides

Des hypothèses sont utilisés en mécanique des fluides pour bien réaliser une étude plus réaliste. Le fluide est considéré comme un milieu :

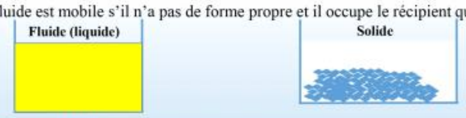
- ✓ dont les propriétés caractéristiques sont continues.
- ✓ **Homogène** telles que ses caractéristiques sont les mêmes en tout point
- ✓ **Isotrope** c'est-à-dire ses propriétés ne dépendent pas des directions du repère d'étude.
- ✓ D'une certaine **viscosité**. Cette propriété indique que lors d'un mouvement du fluide, les particules fluide ne se déplacent pas de la même vitesse.



Fluide parfait en mouvement	Fluide parfait ou réel au repos	Fluide parfait ou réel uniformément accéléré	Fluide réel en mouvement

6

Un fluide est mobile s'il n'a pas de forme propre et il occupe le récipient qui lui est offert.



La compressibilité d'un fluide traduit la diminution de volume due à l'accroissement de la pression. Ce paramètre permet de distinguer entre un liquide et un gaz.

Le liquide est un fluide qui occupe un volume déterminé qui varie très peu sous l'action de forte variation de pression ou de température. Par contre un gaz est un fluide qui occupe la totalité du volume qui lui est offert. Deux types peuvent se présenter :

Coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial p}\right]$

fluide = liquide, gaz.

Statique des fluides : fluides au repos.

Dynamique des fluides : fluide en mouvement.

fluide : Milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, et qui peut s'écouler.

Deux catégories des fluides :

✓ fluids newtoniens : (eau, air, ...) ayant une viscosité

pression. Ce paramètre permet de distinguer entre un liquide et un gaz.
Le liquide est un fluide qui occupe un volume déterminé qui varie très peu sous l'action de forte variation de pression ou de température. Par contre un gaz est un fluide qui occupe la totalité du volume qui lui est offert. Deux types peuvent se présenter :

Coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial P}\right]_T$

Coefficient de compressibilité isentropique $\chi_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial P}\right]_S$

7

➤ **Masse volumique** $\rho = \frac{m}{V}$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Fluide	Masse volumique	Type du fluide
Benzène	0.880 10^3	Incompressibles
Chloroforme	1.48910^3	
Eau	10^3	
Huile d'olive	0.918 10^3	
Mercure	13.546 10^3	
Air	0.001205 10^3	Compressibles
Hydrogène	0.000085 10^3	
Méthane	0.000717 10^3	

Les valeurs présentées dans ce tableau sont prise à titre indicatif dans les conditions normales.

8

➤ **Poids volumique** $\varpi = \frac{mg}{V} = \rho g$ $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

➤ **Densité** $d = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$ [sans unité]

ρ est la **masse volumique** du fluide considéré et ρ_{ref} est celle du **référence**. **L'air** est considéré comme référence des fluides **compressibles** et **l'eau** pour les fluides **incompressibles**.

➤ **Viscosité :** Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à une force qui impose son mouvement. C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide et sa capacité à s'écouler.

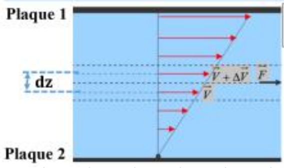
La **viscosité** est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes. On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

9

Viscosité dynamique (μ) qui exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal.seconde (Pa · s) ou Poiseuille (Pl) :

$$1\ \text{Pa.s} = 1\ \text{Pl} = 1\ \text{kg/ms}$$

Viscosité cinématique (ν) s' exprime par la rapport entre **la viscosité dynamique** et **la masse volumique.** Son unité est m^2/s ou le stokes tel que $1\ St = 10^{-4}\ m^2/s$



$\frac{F}{S} = \mu \frac{\Delta V}{\Delta z}$

F : force de glissement entre les couches en **(N)**
μ : Viscosité dynamique en **(kg/ms)**
S : Surface de contact entre les deux couches en **(m^2)**
ΔV: Ecart de vitesse entre les deux couches en **(m/s)**
Δz: Distance entre deux couches en **(m)**

10

On considère l'air de l'atmosphère comme un gaz parfais.
Déterminer le coefficient de compressibilité isotherme de l'air.
Calculer la valeur de ce coefficient dans les conditions normales de pression ($P = 1bar, T = 20°C$).
Quelle pression doit-on ajouter à la pression atmosphère pour réduire un volume de l'eau de 1.25%. Le coefficient de compressibilité de l'eau est $\chi_T = 0.45\ 10^{-9} Pa^{-1}$.

Un fluide peut subir deux types de forces:
Des forces de contact (forces surfaciques)
Des forces à distance (Forces volumiques)
Les forces de volume sont dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces. Elles sont de la forme $\rho \vec{F} dV$ (Exemple le poids).
En général, la force $\vec{F}$ ne dépend que de la position du point et ne dépend pas du temps.
Les forces de surface sont des forces exercées par le milieu extérieur sur la surface délimitant le domaine occupé par le fluide $p\overrightarrow{dF} = -pdS\vec{n}$.

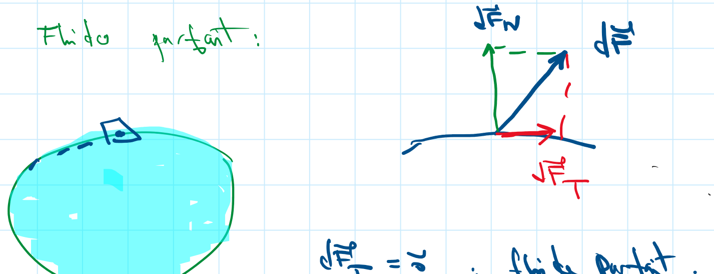
11 Statique des fluides

➤ **Pression en point d'un fluide**
➤ **Equation fondamentale de la statique des fluides**
➤ **Statique des fluides incompressibles (liquides)**
➤ **Statique des fluides compressibles (gaz parfaits)**

✓ fluids newtonien : (eau, air, ...) ayant une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la T°
fluids non-newtonien : (gels, sang, pâte ...)
la viscosité varie en fonction des contraintes appliquées.

Ce cours on va traiter les fluids newtoniens.

Fluide parfait :

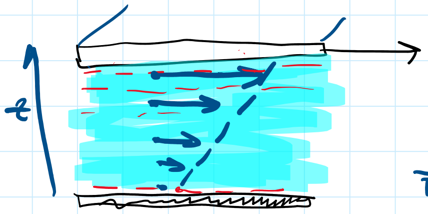


$d\vec{F}_T = \vec{0}$: fluide parfait.

Fluids incompressible : ρ = cte ∀t, x, y, z
eau, huile

Fluids compressibles : gaz, air...

viscosité : caracterise les frottements internes du fluide.



$\frac{\Delta V}{\Delta z}$

$\vec{F} \propto S$. $\frac{\text{vitesse}}{\text{profondeur}}$

μ : viscosité dynamique (kg/m.s)

$\vec{F} = \mu . S \frac{\Delta V}{\Delta z}$

viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (stock) m^2/s
ρ masse volumique

Caractérise le temps d'écoulement

11 Statique des fluides

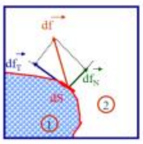
- Pression en point d'un fluide
- Equation fondamentale de la statique des fluides
- Statique des fluides incompressibles (liquides)
- Statique des fluides compressibles (gaz parfaits)

Gradtrise le temps d'écoulement

12 Statique des fluides

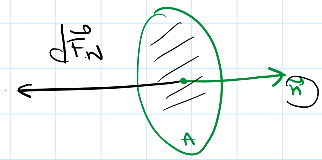
La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. Elle concerne l'étude de toute situation où il n'y a pas de mouvement relatif.

Dans un milieu quelconque, que dans un fluide, soit un élément de surface dS qui sépare le milieu fluide en deux parties (1) et (2) :



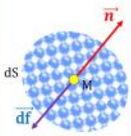
La force que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers cet élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque. Mais cette force peut être décomposée en deux vecteurs: $d\vec{f} = d\vec{f}_T + d\vec{f}_N$

Les quantités $\frac{d\vec{f}_T}{dS}$ et $\frac{d\vec{f}_N}{dS}$ représentent respectivement la contrainte tangentielle et la contrainte normale ou pression tangentielle et normale. En statique des fluides, seules $d\vec{f}_N$ qui interviennent. Pas de frottement entre les couches fluides. Les forces tangentielles n'interviennent qu'en dynamique des fluides visqueux.



13

En tout point d'un fluide existe une certaine pression. On considère alors un point M dans un fluide. Soit dS un élément de surface entourant le point M (surface fermée).



La pression p au point M est donnée par :

$$\vec{df} = -pdS\vec{n}$$

- ✓ La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface dS.
- ✓ La pression p est une grandeur scalaire (positive) définie en tout point du fluide
- ✓ L'unité de pression dans le système international est le pascal ($Pa = N.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}$. Cette unité étant faible (un pascal représente environ la pression exercée par un confetti posé sur votre main), on exprime les pressions en hectopascals (**hPa**), kilopascals (kPa) ou mégapascals (MPa).

$$P_A = \frac{\|d\vec F_N\|}{dS}$$

$$d\vec F_N = -P_A \cdot dS \cdot \vec n$$

à retenir.

14

D'autres unités peuvent être employées à savoir :
- le bar (bar) et son sous multiple le millibar (mbar)
- le millimètre de mercure ou Torr
- le millimètre de colonne d'eau ou le mètre de colonne d'eau (m CE)
- l'atmosphère (atm)

La pression atmosphérique est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer cette pression est équivalente à celle exercée par une colonne d'environ 760 mm de mercure. Elle varie tous les jours légèrement: elle est néanmoins toujours au voisinage de 1 bar.

Exemple

Po (en moyenne, niveau de la mer) = $1013\ millibars\ =\ 1{,}013\ bars\ =\ 1{,}013\ 10^5\ P$.

La correspondance entre ces unités est la suivante:

$$750\ mm\ de\ mercure\ \approx\ 10{,}2\ m\ CE\ \approx\ 0{,}987\ atm$$

15

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_\Omega \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{T} dS + \int_\Omega \rho \vec{f}\, dV$$

Ω est le domaine d'étude et $\partial\Omega$ sont les frontières du domaine Ω. $\vec{T}$ sont les efforts surfaciques et $\vec{f}$ sont les forces volumiques.

La statique des fluides concerne un fluide au repos ($\vec{V} = \vec{0}$) ou uniformément accéléré ($\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$) donc l'équation fondamentale de la dynamique se réduit :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{T} dS + \int_\Omega \rho \vec{f}\, dV = \vec{0}$$

Au repos, toutes les forces surfaciques se réduisent aux efforts normaux donc $\vec{T} = -p\vec{n}$ avec p est la pression du fluide.

$$\int_S -p\vec{n} dS + \int_\Omega \rho \vec{f}\, dV = \vec{0}$$

16

Formule de la divergence:

$$\int_S \vec{T}.\vec{n}dS = \int_\Omega \mathrm{div}(\vec{T})dV$$

Formule du gradient:

$$\int_S f.\vec{n}dS = \int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{grad}}fdV$$

Formule de Stokes:

$$\int_C \vec{A}dS = \int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}dS$$

En utilisant donc la formule du gradient, l'équation précédente s'écrit:

$$\int_\Omega -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)dV + \int_\Omega \rho\vec{f}\,dV = \vec{0} \Longrightarrow \rho\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)$$

Cette équation est la fameuse **équation fondamentale de statique** des fluides.

17

On appelle l'hydrostatique la statique des fluides incompressibles. Le fluide a pour masse volumique ρ et champ de pesanteur est le seul champ de forces extérieures (forces volumiques). Soit (oz) un axe vertical **ascendant**. L'équation de la statique sera :

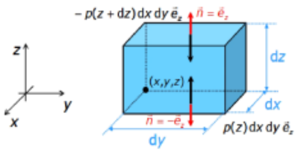
$$\left(0-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \left(0-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\vec{\jmath} + \left(-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}\right)\vec{k} = \vec{0} \qquad \vec{g} \quad \vec{k}$$

Cela implique:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \Longrightarrow dp = -\rho g dz, p = p(z)$$

Avec ρ la masse volumique peut être constante indépendante de la pression (fluide incompressible, liquide) ou variable en fonction de celle-ci (compressible, gaz).

On considère un élément de volume $\mathbf{dV}$ de forme parallélépipède de volume $\mathbf{dV} = \mathbf{dxdydz}$ dans un système de cordonnées cartésiennes $(\mathbf{O, x, y, z})$ à l'intérieur d'un fluide en équilibre de masse $\mathbf{dm = \rho dV}$.



Bilan des forces

Force volumique $\mathbf{d\vec{P}}$: le poids du fluide donné par :

$$\mathbf{d\vec{P}} = \mathbf{dm}.\vec{g} = \rho\, dV\vec{g}$$

Force de surface $\mathbf{d\vec{F}}$: correspond à la force de pression dont la résultante est donnée par ses trois composantes

$$\mathbf{d\vec{F}} = \mathbf{dF_x\vec{e}_x + dF_y\vec{e}_y + dF_z\vec{e}_z}$$

On pose

$$\mathbf{d\vec{F}_1} = -\mathbf{p(x,y,z)dS_1\vec{n}_1}$$
$$\mathbf{d\vec{F}_2} = -\mathbf{p(x,y,z+dz)dS_2\vec{n}_2}$$

où $\mathbf{dS_1}$ est la surface élémentaire en $\mathbf{z}$ de normale $\mathbf{\vec{n}_1}$ et $\mathbf{dS_2}$ est la surface élémentaire en $\mathbf{z + dz}$ de normale $\mathbf{\vec{n}_2}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{dF_z} &= (\mathbf{d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2}).\vec{e}_z \\ &= \mathbf{p(x,y,z)dS_1 - p(x,y,z+dz)dS_2} \\ &= \mathbf{[p(x,y,z) - p(x,y,z+dz)]dxdy} \end{aligned}$$

Par un développement au premier ordre de $\mathbf{p(x,y,z+dz)}$, on trouve :

$$\mathbf{p(x,y,z+dz) = p(x,y,z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz} \;\; ; \text{Ainsi } \mathbf{dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz = -\frac{\partial p}{\partial z}dV}$$

Par analogie sur les deux axes $\mathbf{(ox)}$ et (oy), on trouve

$$\begin{cases} \mathbf{dF_x} = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{dV} \\ \mathbf{dF_y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{dV} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de la force surfacique, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{d\vec{F}} &= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{dV\vec{e}_x} - \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{dV\vec{e}_y} - \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{dV\vec{e}_z} \\ &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{p\,dV} \end{aligned}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique sur la particule fluide implique :

$$\begin{cases} \mathbf{d\vec{P} + d\vec{F} = dm\vec{\gamma}} \\ \mathbf{\rho dV\,\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p\,dV = \rho dV\vec{\gamma}} \\ \mathbf{\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p = \rho\vec{\gamma}} \end{cases}$$

$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ou $\mathbf{dp = -\rho g dz}$ est l'équation fondamentale de la statique.

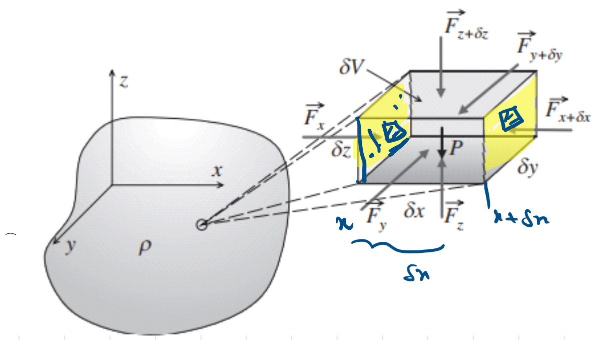
La résolution de cette équation permet de calculer la pression et sa différence entre points quelconques du même fluide.

18

Application aux fluides incompressibles

On considère un liquide de masse volumique

Relation de la statique :



• les forces exercées sur ce domaine :

i) $\vec{P} = m\vec{g} = -\rho.\delta V.g.\vec{z} = -\rho\,\delta x\delta y.\delta z.g\,\vec{z}$

$R_x = F_x - F_{x+\delta x}$

$= (p(x,y,z) - p(x+\delta x,y,z))\,\delta y\,\delta z$

$p(x+\delta x,y,z) - p(x,y,z) = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}.\delta x$

$R_x = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}.\delta x\,\delta y\,\delta z$

$R_y = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}.\delta x\,\delta y\,\delta z$

$R_z = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$ ✓

Eqt fondamental de la dynamique :

$\vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z + \vec{P} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

18

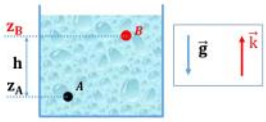
Application aux fluides incompressibles

On considère un liquide de masse volumique constante. L'équation de statique devient:

$p + \rho g z = cte$

Si on considère les deux points A et B du fluide, cette équation s'écrit :

$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$



Soit $z_B - z_A = h$ ====> $p_A = p_B + \rho g h$

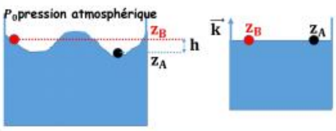
On remarque que $h > 0$ donc $p_A > p_B$. La pression diminue avec l'altitude et cela se voit à partir de $\frac{dp}{dz} = -\rho g < 0$.

19

Application aux fluides incompressibles

L'équation fondamentale de la statique d'un fluide parfait incompressible est nommée relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH). Comme conséquences immédiates de cette relation, on tire les propositions suivantes:

- Les surfaces d'égales pressions dans un fluide sont des plans horizontaux (plans isobares).
- La surface libre d'un liquide (dans un champ de pesanteur uniforme) est horizontale.



Tenant compte de la relation RFH entre les points A et B on écrit :

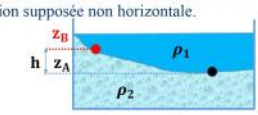
$p_A = p_B + \rho g(z_B - z_A) = p_B + \rho g h$

Puisque $p_A = p_B = p_0$ alors $h = 0$ ou $z_B = z_A$ ce qui indique que la surface libre est horizontale. Cette surface est dite isobare.

20

Surface de séparation de deux fluides non miscibles

On considère deux fluides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 respectivement. Les deux fluides sont contenus dans un même récipient. Soient A et B deux points de la surface de séparation supposée non horizontale.



Tenant compte de la relation RFH entre les points A et B on écrit :

dans le fluide (1) $\quad p_A - p_B = \rho_1 g(z_B - z_A) = \rho_1 g h$

dans le fluide (2) $\quad p_A - p_B = \rho_2 g(z_B - z_A) = \rho_2 g h$

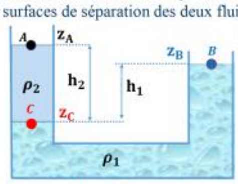
D'après les deux équations on a $(\rho_2 - \rho_1)gh = 0$ donc $h = 0$.

En conséquence, la surface de séparation est plane et horizontale.

21

Surface de séparation de deux fluides non miscibles

On verse un liquide de masse volumique ρ_1 dans un tube en U et on ajoute ensuite dans l'autre branche un autre liquide de masse volumique ρ_2. Soient A, B et C trois points des surfaces de séparation des deux fluides.



La relation **RFH** entre les points **A** et **C** donne:

$p_C = p_A + \rho_2 g(z_A - z_C) = p_A + \rho_2 g h_2$

La relation RFH entre les points B et C donne:

$p_C = p_B + \rho_1 g(z_B - z_C) = p_B + \rho_1 g h_1$

Les points A et B se situent sur la surface libre donc

$p_A = p_B = p_0$ alors $\rho_2 h_2 = \rho_1 h_1$

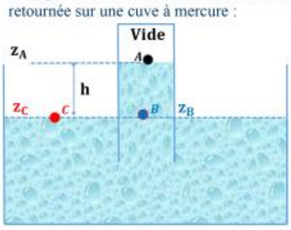
=====> $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{h_1}{h_2}$

Les dénivellations de deux liquides non miscibles dans des vases communicants sont en rapport inverse de leurs masses volumiques. Si $\rho_1 = \rho_2$ le fluide est à la même hauteur.

22

Mesure de la pression atmosphérique

Un baromètre à mercure permet de mesurer la pression atmosphérique locale p_0. Il s'agit d'une colonne de mercure, au sommet de laquelle on a fait le vide, et qui est retournée sur une cuve à mercure :



On applique la loi fondamentale de la statique des fluides au système mercure :

Entre **B** et **A** (oz ascendant) :

$p_B = p_A + \rho_{hg} g(z_A - z_B) = p_A + \rho_{hg} g h$

Comme $p_B = p_C = p_0$ et $p_A = 0$ donc

$p_0 = \rho_{hg} g h$

$\rho_{hg} = 13546(kg.m^{-3})$; $g = 9{,}8(m.s^{-2})$

L'expérience a montré que $h = 760mm$ d'où

$p_0 = 101325\ kg.m^{-1}.s^{-2} = 1.01325bar$

$p_0 \approx 1bar = 10^5 Pa$

∂z

$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g.$

$\vec{\nabla}.p = \rho\vec{g}.$

$\int dp = -\int \rho g\, dz. \qquad (\rho = cte)$

$d(p + \rho g z) = 0$

$p + \rho g z = cte$

$(p + \rho g z)_A = (p + \rho g z)_B$

$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$

$p_A = p_B + \rho g(z_B - z_A)$

23

Mesure de la pression atmosphérique

Si on remplace le mercure avec de l'eau et par le même raisonnement on trouve:

$$p_0 = \rho_{eau} g h_{eau} ====> \rho_{eau} h_{eau} = \rho_{hg} h \quad \text{soit} \quad h_{eau} = \frac{\rho_{hg}}{\rho_{eau}} h$$

L'application numérique donne : $h_{eau} = 10.33m$.

La pression atmosphérique vaut

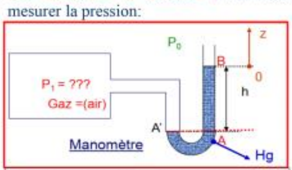
760mm de mercure ou $10.33m$ de l'eau

Le choix de mercure est dû d'une part à sa forte masse volumique qui permet de traduire 1atm par une hauteur raisonnable de 76 cm et par contre avec l'eau il faudrait 10 m et d'autre part à sa faible volatilité, car en tête de colonne règne le vide et une partie du mercure se vaporise et ceci risque de changer la pression qui est supposée nulle dans le vide (la pression de vapeur saturante du mercure est très faible et reste négligeable).

24

Mesure de la pression atmosphérique

Un manomètre à mercure à air libre est relié à une enceinte dont on veut mesurer la pression:



Les pressions sont toujours mesurées à partir d'une origine (pression relative) qui est la pression atmosphérique.

$$p_e = p - p_a$$

En se reportant à la figure et on applique la loi fondamentale de la statique des fluides au système mercure entre les points A et B

$p_A = p_B + \rho_{hg} g (z_B - z_A)$ Comme

$p_A = p_{A'} = p_1$ et $p_B = p_0$

$z_A = -h$ et $z_B = 0$ Donc

$$p_1 = p_0 + \rho_{hg} g h$$

La pression manométrique (ou **effective**) est mesurée par rapport à la pression atmosphérique. A l'aide du manomètre à mercure.

25

Remarques importantes

Il existe trois types de mesures de pression:

<u>Absolue</u>: la mesure de la pression absolue est effectuée par rapport au vide.

A l'aide du baromètre à mercure

<u>Effective (ou Manométrique)</u> : Elle est mesurée par rapport à l'atmosphérique.

A l'aide du manomètre à mercure

<u>Différentielle</u> : la pression <u>différentielle</u> est similaire à la pression manométrique mais elle est mesurée par rapport à une pression de référence spécifique.

On peut différencier deux (2) pressions:

- **Pression atmosphérique** : pression de surface dans des conditions habituelles
- **Pression** hydrostatique : variable en fonction de la profondeur atteinte. Cette pression augmente de 1 bar par tranche de 10 mètres sous l'eau *(0,98 bar dans l'eau douce et 1,007 bar dans l'eau de mer).*

La pression absolue en plongée est la pression totale = Pression atmosphérique + Pression due à l'eau. $p = p_0 + \rho g h$

26

Application aux fluides compressibles

L'application de l'équation fondamentale de la statique pour un fluide compressible tient compte de la variation de la masse volumique du fluide en fonction de la pression et de la température. Cette application concerne souvent les gaz en tant que fluides compressibles. L'intégration de la relation locale de la statique ($\mathbf{dp = -\rho g dz}$) n'est plus directe. Pour ce faire, on fait appel à l'équation d'état du gaz considéré en exprimant la masse volumique en fonction de la température et de la pression. Pour simplifier on prend un gaz parfait (isotherme!!!!) d'équation d'état :

$$\mathbf{pV = nRT}$$

La masse volumique est donnée en fonction de nombre **n** et de la masse molaire **M** par

$$\rho = \frac{\mathbf{nM}}{\mathbf{V}}$$

En partant de l'équation fondamentale de statique on trouve:

$$\mathbf{p(z) = p_0 e^{-\frac{M}{RT} g (z - z_0)}}$$

27

Application aux fluides compressibles

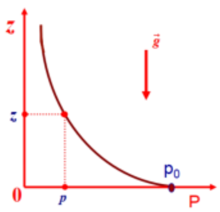
On a la variation de la pression est donnée par:

$$\mathbf{p(z) = p_0 e^{-\frac{M}{RT} g (z - z_0)}}$$

Si $\mathbf{z_0 = 0}$ donc $\mathbf{p(z) = p_0 e^{-\frac{M}{RT} g z}}$

Pour $\mathbf{z_0 = z = 0}$ donc $\mathbf{p(z = z_0) = p_0}$

Pour $\boldsymbol{z}$ tend vers ∞ la pression $\mathrm{p}(\boldsymbol{z})$ tend vers une pression nulle. Cela indique la variation illustrée sur la figure suivante:



Donc la pression d'un gaz diminue quand z augmente. On pourra considérer que la pression de l'air est la même pour les système ayant des dimensions d'une dizaine de mètres contrairement au liquide.

28

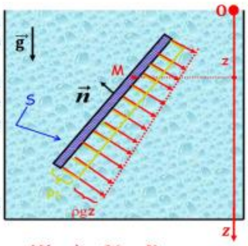
Forces hydrostatiques

On peut désormais s'intéresser à la détermination des forces s'exerçant sur les surfaces solides immergées.

On sait que $\mathbf{d\vec{F}} = -\mathbf{p\vec{n}dS}$ est la force de pression élémentaire s'exerçant sur la surface élémentaire $\mathbf{dS}$. La force totale est obtenue donc par une intégration sur la surface.

$$\vec{F} = \int_S -p\vec{n}dS$$

La difficulté qui se pose est la détermination de la pression $\mathbf{p}$.



On applique la relation fondamentale de la statique entre $M(p, z)$ et $O(p_0, 0)$

$$p = p_0 + \rho gz$$

29

Forces hydrostatiques

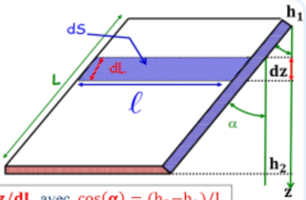
La force totale devient maintenant

$$\vec{F} = -\vec{n}\int_S (p_0 + \rho gz)dS$$

sachant que $S = l.L$

$$\vec{F} = -\left(p_0 S + \int_S \rho gz dS\right)\vec{n}$$

Pour terminer les calculs, il faut choisir un $\mathbf{dS}$. Posant $\mathbf{dS} = \boldsymbol{l}.\mathbf{dL}$.



Soit α un petit angle tel que: $\cos(\alpha) = dz/dL$ avec $\cos(\alpha) = (h_2 - h_1)/L$

donc l'intégrale $\int_S zdS$ sera

$\int_S zdS = \frac{lL}{h_2 - h_1}\int_S zdz = S\left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right) = Sh_G$ ======>> $\vec{F} = -(p_0 + \rho g h_G)S\,\vec{n}$

avec h_G est le barycentre de la surface S.

30

Forces hydrostatiques

Dans le cas d'une parois inclinée, cette parois subit des forces de pression dues à:

- A la force exercée par le fluide sur dS

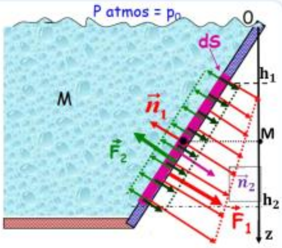
$$\vec{F}_1 = -(p_0 + \rho g h_G)S\,\vec{n}_1$$

- A la force exercée par l'air sur dS

$$\vec{F}_2 = -p_0 S\,\vec{n}_2 = p_0 S\,\vec{n}_1$$

La résultante des forces de pression est donc

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \rho g h_G S\vec{n}_2 = -\rho g h_G S\vec{n}_1$$



31

Forces hydrostatiques

Considérons une surface plane. Un fluide de masse volumique ρ se trouve en contacte avec cette paroi. On considère un élément de surface dS, de cette paroi, placée à la côte z. Cette surface est rectangulaire d'une aire $dS = Ldz$. Cette paroi subit des forces de pression dues à:

- A la force exercée par le fluide sur dS

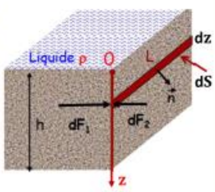
$$d\vec{F}_1 = (p_0 + \rho gz)dS\,\vec{n}$$

- A la force exercée par l'air sur dS

$$d\vec{F}_2 = -p_0 dS\vec{n}$$

La résultante des forces de pression est donc

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = \rho gzdS\vec{n}$$



Cette résultante est obtenue par l'intégration sur toute la parois; soit $\vec{F} = \rho g S\frac{h}{2}\vec{n}$

32

Point d'application d'une force hydrostatique:

Le point d'application d'une force hydrostatique vérifie la relation suivante:

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$$

Moment de par rapport à O

Somme des moments élémentaires par apport à O de $d\vec{F}$

Le point O est souvent choisi appartenant à la surface S.

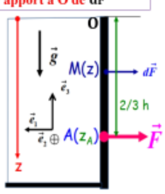
Cas d'une paroi :

- Le moment de la résultante des forces au point

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = z_A(-\vec{e}_3) \wedge F(-\vec{e}_1) = z_A\rho gL\frac{h^2}{2}\vec{e}_2$$

- La somme des moments par rapport à O de toutes les forces $\mathbf{d\vec{F}}$

$$\int z(-\vec{e}_3) \wedge \rho gLzdz(-\vec{e}_1) = \rho gL\int_0^h z^2dz\vec{e}_2 = \rho gL\frac{h^3}{3}\vec{e}_2\,; \quad z_A = \frac{2}{3}h$$



33

Centre de la poussée: *il correspond au point ou les moments sont nuls*

Dans un repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$: $\qquad \vec{M}_O = \int \overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{d\vec{F}}$

Dans ce repère on peut écrire : $\overrightarrow{OM} = -z\,\vec{e}_3$ et $d\vec{F} = -\varpi\, zdS\vec{e}_1$

$$\vec{M}_O = \int -z\vec{e}_3 \wedge -\varpi\, zdS\vec{e}_1 = \int \varpi z^2\, dS\vec{e}_2 =====> \vec{M}_O = \varpi I_{o,\vec{e}_2}\vec{e}_2$$

Avec $I_{o,\vec{e}_2} = \int z^2\, dS$ est le moment quadratique de la surface par rapport à l'axe (oy).

Soit G le centre de la poussée à déterminer. Par la raison de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe (0,z). Tenant compte d'équiprojectivité on a;

$$\vec{M}_G = \vec{M}_O + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F} = \vec{0} =====> \vec{M}_O = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} = \varpi I_{o,\vec{e}_2}\vec{e}_2$$

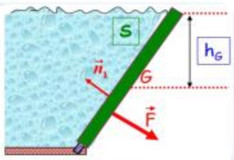
D'après cette équation on obtient les coordonnées du centre de la poussée comme suit:

$$z_G = -\frac{\varpi I_{o,\vec{e}_2}}{p_M . S}$$

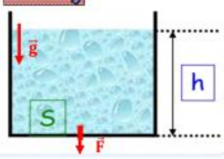
34

Résultats importants:

La poussée (force de pression) exercée par un liquide sur une paroi latérale plane est égale au poids d'une colonne de ce liquide ayant pour base la surface de la paroi et pour hauteur la distance du centre de gravité de cette paroi à la surface du liquide : $\vec{F} = \rho g S h_G \vec{e}_2$

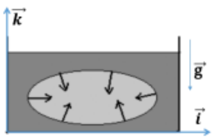


La poussée (force de pression) exercée par un liquide sur le fond horizontal d'un vase est égale au poids d'une colonne de ce liquide ayant pour base le fond du vase et pour hauteur la distance du fond à la surface libre : $\vec{F} = \rho g h S \vec{k}$



35

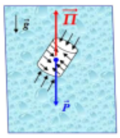
Poussée d'Archimède:



$\vec{\pi} = \rho_{fl} g V \vec{k}$

V est le volume du fluide déplacé

ρ_{fl} est la masse volumique du fluide

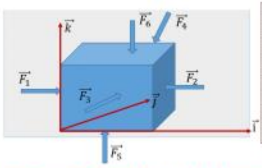


Considérons un corps entièrement immergé dans un fluide homogène au repos. Il occupe un volume *V* et subit de la part du fluide des forces de pression.

" Tout corps plongé dans un liquide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide de remplacement et appliquée à son centre de masse appelé centre de carène. "

36

Ce corps est un cube de coté a, immergé dans un liquide de masse volumique ρ constante:



$\vec{F_1}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (x=0)
$\vec{F_2}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (x=a)
$\vec{F_3}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (y=0)
$\vec{F_4}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (y=a)
$\vec{F_5}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (z=0)
$\vec{F_6}$ est le force exercée sur la surface dans le plan (z=a)

La pression ne dépend que de la hauteur. Alors p_1 , p_2, p_3 et p_4 agissant dans le même plan horizontal. Donc ces pressions sont identiques. Ainsi les surfaces latérales sont identiques (a^2) d'où les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$ sont égales en modules et opposées deux à deux. La force totale exercée sur le cube est $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5} + \vec{F_6} = \vec{F_5} + \vec{F_6}$

37

La force exercée sur le cube est réduite à $\vec{F} = \vec{F_5} + \vec{F_6}$. Or

$$\begin{cases} \vec{F_5} = p_5 S_5 \vec{k} = p_5 a^2 \vec{k} \\ \vec{F_6} = -p_6 S_6 \vec{k} = -p_6 a^2 \vec{k} \end{cases}$$

Donc on obtient $\vec{F} = a^2(p_5 - p_6)\vec{k}$

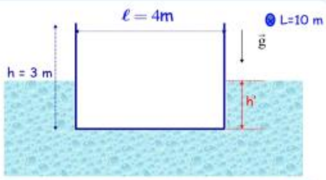
D'après l'équation de l'hydrostatique

$p_5 - p_6 = \rho g a$

d'où $\qquad \vec{F} = \rho g a^3 \vec{k} = \rho g V_{img} \vec{k}$

Elle s'enfonce dans l'eau d'une hauteur h' (voir figure). Calculer *h'*.

Quelle est la masse maximale que peut supporter cette embarcation?



Considérons l'équilibre d'une boîte parallélépipédique à section rectangulaire ouverte flottant sur l'eau (voir Figure). Une telle boîte, de dimensions $L = 10\,m, l = 4\,m, h = 3\,m$ et de masse $M = 20\,t$.

38

A l'équilibre on a :

$$\vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0}$$

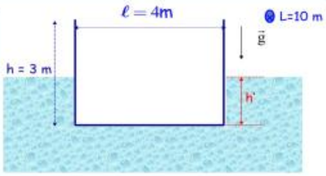
$\vec{\pi} = \rho_{fl} g V \vec{\mathbf{k}}$ et $\vec{\mathbf{P}} = -Mg\vec{\mathbf{k}}$

V est le volume immergé de la boite qui vaut $V = Llh'$ en module on écrit

$Mg = \rho g Llh'$ donc $h' = \frac{M}{\rho l L} = 0.5m$

La masse maximale que peut supporter la boite correspond à une immersion totale de celle-ci

$M = \rho Llh'$ avec $h' = 3m$ donc $M = 120t$



39

Equilibre d'un corps totalement immergé:

Pour que un solide immergé dans un liquide soit en équilibre, il faut que son poids *P* soit égal à la poussée *F* $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

- Si le solide est **homogène**, le poids ($P = V\rho_s g$) et la poussée ($F = V\rho_l g$) sont appliqués au même point : le centre de gravité **G** du solide coïncide avec le centre de poussée **A**
  - si $\rho_s = \rho_l$: le solide est en équilibre indifférent dans le liquide.
  - si $\rho_s > \rho_l$: le solide descend jusqu'à toucher le fond du récipient qui contient le liquide.
  - si $\rho_s < \rho_l$: le solide monte et lorsqu'il émerge à la surface du liquide, la poussée diminue.
- Si le solide est **hétérogène**, les centres **G** et **A** sont des points distincts.
  - si $\overline{\rho_s} = \rho_l$: le solide va tourner et osciller jusqu'à ce que les points soient sur une même verticale (**G** étant en dessous de **A**; équilibre statique).
  - si $\overline{\rho_s} > \rho_l$: le solide tourne et descend à la fois.
  - si $\overline{\rho_s} < \rho_l$: le solide tourne et monte à la fois et vient de flotter à la surface du liquide.

40

Equilibre d'un corps flottant:

Les résultats établis précédemment s'appliquent intégralement si la surface S limite un corps solide en équilibre, immergé complètement ou flottant. C'est le « principe d'Archimède » : le corps solide subit une poussée égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé. Elle passe par le centre de gravité du volume déplacé, ou centre de poussée.

Un flotteur est un solide de forme quelconque, généralement fermée, en équilibre dans un liquide. L'équilibre n'est possible que si le poids du flotteur est inférieur ou égal au poids du volume de liquide qu'il peut déplacer.

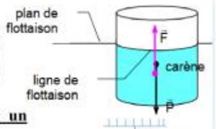
Le plan de flottaison est le plan de la surface libre du liquide. Ce plan coupe le flotteur suivant une surface appelée flottaison dont le contour s'appelle ligne de flottaison.

La carène est le volume immergé du flotteur (volume situé au dessous du plan de flottaison). La poussée du liquide passe par le centre de gravité du volume de la carène. C'est le centre de poussée ou centre de carène.

41

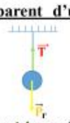
Equilibre d'un corps flottant:

Comme pour un flotteur en équilibre le poids du liquide déplacé est égal au poids du flotteur (donc constant), les différentes positions d'équilibre correspondent à des flottaisons de même volume (flottaisons isocarènes).



Poids réel et Poids apparent d'un solide immergé dans un liquide:

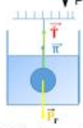
- A l'équilibre $\vec{P}_r + \vec{T} = \vec{0}$ donc $P_r = T = m_r g$



Avant immersion

- A l'équilibre $\vec{P}_r + \vec{T} + \vec{\pi} = \vec{0}$ donc $T' = P_r - \pi = m_r g - \rho g V$

  $P_a = P_r - \pi = m_a g$



Après immersion

- Sachant que $T = 10N$ et $T' = 8N$. **Déterminer la masse volumique du métal immergé dans l'eau.**

42

Exercices corrigés

Exercice 1:

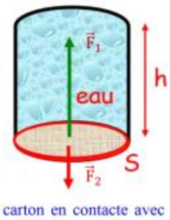
$\vec{F}_1$: Force de l'air sur le carton

$\vec{F}_2$: Force de l'eau sur le carton

- Diamètre du verre : $D = 6{,}8$ cm, - Contenance d'eau : 250 ml d'eau.
- Masse volumique d'eau : $\rho = 1g/ml$ - Pression atmosphérique : $Patm = 1{,}0\ bar$; - Intensité de pesanteur : $g = 9{,}8$ N/kg.

1°) On calcule la masse d'eau dans le verre en déduire son poids.

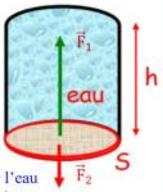
$\rho = m/V \quad m = \rho.V \quad m = 1 * 250 = 250g \quad P = mg = 2{,}45$ N



2°) Que vaut la force pressante exercée par l'eau sur le morceau de carton en contacte avec celle-ci.

Pour calculer cette force soit on applique le principe d'inertie, soit on utilise la définition de la force hydrostatique qu'on a vue au cours.

43



Application du principe d'inertie: la force exercée par l'eau sur le carton correspond au poids de l'eau.

$F = P = mg = 2{,}45N$

Définition de la force pressante: la force exercée par l'eau sur le carton correspond à la force hydrostatique exercée sur la fond d'un récipient.

$F = (\rho g h)S_{fond} = \rho g V = mg = 2{,}45N$

3°) Pourquoi l'eau ne tombe-t-elle pas?

Pour répondre à cette question, il faut comparer la pression exercée par l'eau sur le carton et la pression extérieure. Donc on va calculer les deux pressions.

Par définition la pression est la force sur unité de surface.

$p = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi D^2} = 6{,}75\ 10^2 Pa \ll p_0 = 1bar = 10^5 Pa$

44

Exercice 2

1) Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité $d = 0{,}7$.
On donne:
-l'accélération de la pesanteur $g = 9.81 m/s^2$
- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\ kg/m^3$
2) Calculer le poids P_0 d'un volume $V = 3$ litres d'huile d'olive ayant une densité $d = 0.918$.
4) Déterminer sa viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa viscosité cinématique est 1.089 Stockes

45

-l'accélération de la pesanteur $g = 9.81 N/kg$
- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\ kg/m^3$

1) Déterminons le poids volumique de l'essence sachant que sa densité $d = 0{,}7$.

le poids volumique est $\varpi = \rho_{es} g$ avec $d = \rho_{es}/\rho_e$ donc $\varpi = \rho_e d g = 6860\ N/m^3$

2) Le poids P_0 d'un volume $V = 3$ litres d'huile d'olive ayant une densité $d = 0.918$ est

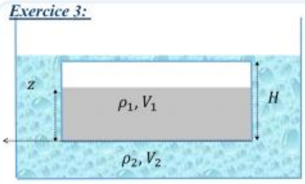
$P_0 = mg = \rho_h V g = \rho_e d V g$ $\quad\quad$ $P_0 = 27{,}017\ N$

3) La viscosité dynamique est exprimée par

$\mu_h = \nu_{h\rho_h} = \nu_h d \rho_{eau}$ $\quad\quad$ $\mu_h = 0{,}1\ Pa.s$

46

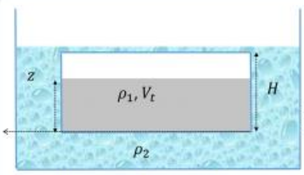
Exercice 3:



$\rho_1 = 910 \frac{kg}{m^3}$, $V_1 = 600 cm^3$, $\rho_2 = 1024 kg/m^3$

1) Trouver une relation entre le Volume émergé V1, volume total V2 et les masses volumiques
2) Calculer le volume V2.
3) Déterminer la valeur de z pour que le réservoir soit en équilibre.
4) Étudier l'état du réservoir

47



$\rho_1 = 910 \frac{kg}{m^3}$, $V_e = 600 cm^3$, $\rho_2 = 1024 kg/m^3$,
$H = 2m$

1) Trouvons une relation entre le Volume émergé Ve, volume total Vt et les masses volumiques

A l'équilibre on a :

$\vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0}$ $\quad$; $\quad$ $\vec{\pi} = \rho_2 g V_e \vec{k}$ et $\vec{P} = -Mg\vec{k}$

$\rho_2 V_e = \rho_1 V_t$

48

2) Calculons le volume Vt.

$$V_t = \frac{\rho_2}{\rho_1} V_e = 666{,}66 cm^3$$

3) La valeur de z pour que le réservoir soit en équilibre.

Bilan des forces appliqué sur le réservoir

Poids du réservoir : $\vec{P} = m\vec{g} = -\rho_1 V_t g\vec{k} = -\rho_1 Szg\vec{k}$

Poussée d'Archimède: $\vec{\pi} = -\rho_2 V\vec{g} = \rho_2 HSg\vec{k}$

A l'équilibre on aura:

$\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$ $\quad -\rho_1 Szg + \rho_2 HSg = 0$ $\quad z = 0{,}25m$

4) Etude de l'état du réservoir. On a trouvé que : $z = 0{,}25m = \frac{H}{8}$ donc

Si $z > \frac{H}{8}$ réservoir va se déplacer vers le bas et dans le cas contraire il va se déplacer vers le haut

49

Exercice 4:

Entre les surfaces:

- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

$$\rho_{essence} = 700 \frac{kg}{m^3}.$$

- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

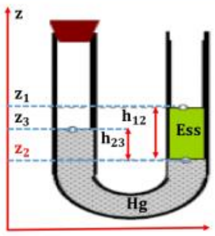
$$\rho_{mercure} = 13600 \frac{kg}{m^3}.$$

La pression sur la surface libre (z_1) correspond à la pression atmosphérique. L'accélération de la pesanteur est $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression p_3.

1°) En appliquant la RSF pour l'essence, calculer en (mbar) p_2 au niveau de la surface de séparation. $h_{12} = 728mm$.

2°) En appliquant la RSF pour l'essence, calculer en (mbar) p_3 au niveau de la surface de séparation. $h_{23} = 15mm$.



50

Entre les surfaces:

- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

$$\rho_{essence} = 700 \frac{kg}{m^3}.$$

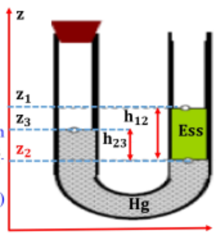
- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

$$\rho_{mercure} = 13600 \frac{kg}{m^3}.$$

La pression sur la surface libre (z_1) correspond à la pression atmosphérique. L'accélération de la pesanteur est $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression p_3.

1°) En appliquant la RSF pour l'essence, calculons en (mbar) p_2 au niveau de la surface de séparation. $h_{12} = 728mm$.



$p_2 - p_1 = \rho_{es} g(z_1 - z_2)$; $p_2 = p_1 + \rho_{es} g h_{12}$ $\qquad p_2 = 1{,}05\ 10^5 = 105$ mbar

51

Entre les surfaces:

- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

$$\rho_{essence} = 700 \frac{kg}{m^3}.$$

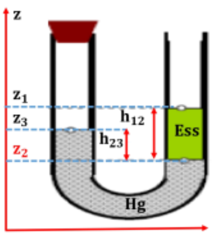
- z_2 et z_1 il s'agit de l'essence de masse volumique

$$\rho_{mercure} = 13600 \frac{kg}{m^3}.$$

2°) En appliquant la RSF pour mercure, calculons en (mbar) p_3 au niveau de la surface de séparation. $h_{23} = 15mm$.

$$p_2 - p_3 = \rho_{mer} g(z_3 - z_2) ; p_3 = p_2 - \rho_{mer} g h_{23}$$

$$p_3 = 1{,}03\ 10^5 = 103 \text{ mbar}$$



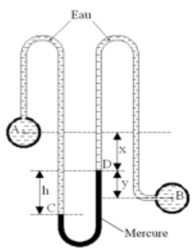
52

Exercice 5:

Dans la figure à droite, on considère deux récipients **A** et **B** contenant de l'eau aux pressions $P_A = 2.80\ Pa$ et $P_B = 1.40\ bar$ respectives.

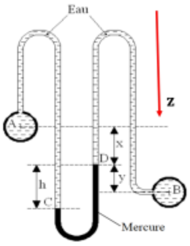
Soient $x + y = 2m$ et $d = 13.57$ la densité du mercure. La masse volumique de l'eau est $\rho_{eau} = 1000 kg/m^3$.

1°) Déterminer la pression au point C en fonction de P_A et x.
2°) Déterminer la pression au point D en fonction de P_B et y.
3°) Calculer la dénivellation h du mercure du manomètre différentielle en déduire les valeurs numériques de P_D et P_C.



53

Dans la figure à droite, on considère deux récipients **A** et **B** contenant de l'eau aux pressions $P_A = 2.80\ Pa$ et $P_B = 1.40\ bar$ respectivement.
Soient $x + y = 2m$ et $d = 13.57$ la densité du mercure. La masse volumique de l'eau est $\rho_{eau} = 1000 kg/m^3$.



1°) Déterminons la pression au point C en fonction de p_A et x.

2°) En appliquant la RSF entre A et C on trouve

$$\mathbf{p_C - p_A = \rho_{eau} g(z_C - z_A)\ ;\ p_C = p_A + \rho_{eau} g(h + x)}$$

54

2°) Déterminer la pression au point D en fonction de p_B et y.

En appliquant la RSF entre D et C on trouve

$$\mathbf{p_D - p_C = \rho_{mer} g(z_D - z_C)\ ;\ p_D = p_C + d\rho_{eau} g(-h)}$$

$$\mathbf{p_D = p_A + \rho_{eau} gx + \rho_{eau} gh(1 - d)}$$

3°) Calculons la dénivellation h du mercure du manomètre différentielle en déduire les valeurs numériques de p_D et p_C.

En appliquant la RSF entre B et D on trouve

$$\mathbf{p_B - p_D = \rho_{eau} g(z_B - z_D)\ ;\ p_B = p_D + \rho_{eau} gy}$$

$$\mathbf{p_B = p_A + \rho_{eau} gx + \rho_{eau} gh(1 - d) + \rho_{eau} gy} \qquad \mathbf{p_B = p_A + \rho_{eau} gh(1 - d) + \rho_{eau} g(x + y)}$$

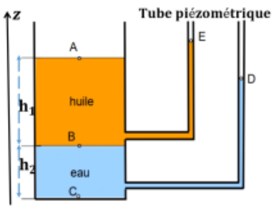
$$\mathbf{h = (-p_B + p_A + \rho_{eau} g(x + y)/(\rho_{eau} g(d - 1))} \qquad \mathbf{h = 1,272m}$$

55

Exercice 6:

On désigne par:
- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézométriques,
- $(O, \vec{z})$ est un axe vertical tel que $\mathbf{z_c = 0}$.

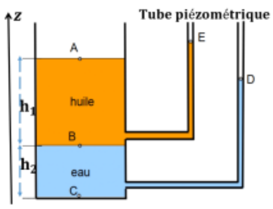
Appliquer la relation fondamentale de la statique entre les points:
1°)A et B en déduire la pression $\mathbf{p_B}$ (bar) au point B
2°)A et E en déduire le niveau de l'huile $\mathbf{z_E}$.
3°)B et C en déduire la pression $\mathbf{p_C}$ (bar) au point C.
4°) C et D en déduire le niveau de l'huile $\mathbf{z_D}$.



56

On désigne par:
- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézométriques,
- $(O, \vec{z})$ est un axe vertical tel que $\mathbf{z_c = 0}$.

Appliquer la relation fondamentale de la statique entre les points:
1°)La pression $\mathbf{p_B}$ (bar) au point B



En appliquant la RSF entre A et B on trouve

$$\mathbf{p_B = p_A + \rho_{huile} g(z_A - z_B)\ ;\ p_B = p_A + \rho_{huile} gh_1} \qquad \mathbf{p_B = 1,50031\ Pa = 1,5\ bar}$$

57

2°)A et E en déduire le niveau de l'huile $\mathbf{z_E}$.

En appliquant la RSF entre A et E on trouve

$$\mathbf{p_A = p_E + \rho_{huile} g(z_E - z_A)\ ;\ p_E = p_A = p_{atm}} \qquad \mathbf{z_E = z_A = h_1 + h_2 = 11m}$$

3°)La pression au point C en (bar).

En appliquant la RSF entre B et C on trouve

$$\mathbf{p_C = p_B + \rho_{eau} g(z_B - z_C)\ ;\ p_C = p_B + \rho_{eau} gh_2} \qquad \mathbf{p_C = 199081\ Pa \approx 2\ bar}$$

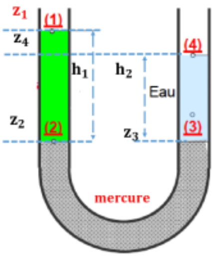
4°) Le niveau d'huile au point D.

En appliquant la RSF entre C et D on trouve

$$\mathbf{p_C - p_D = \rho_{eau} g(z_D - z_C)\ ;\ p_D = p_a} \qquad \mathbf{z_D = 10,1m}$$

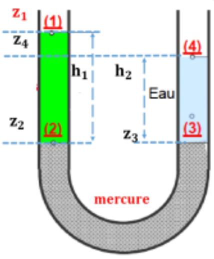
58

Exercice 7:



Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau-alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur $\mathbf{h_1 = 30cm}$. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau $\mathbf{h_2 = 24cm}$.
On donne $z_1 - z_2 = h_1$, $z_4 - z_3 = h_2$, $z_3 + z_2 = 20\text{cm}$
1°) Appliquer la relation fondamentale de la statique pour les trois fluides (eau, alcool, mercure).
2°) En déduire la masse volumique du mélange eau-alcool et celle du mercure.
3°) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4.

59

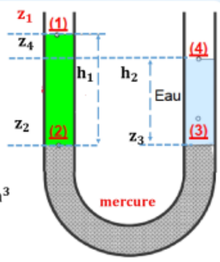


Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau-alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur $\mathbf{h_1 = 30cm}$. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau $\mathbf{h_2 = 24cm}$.
On donne $z_1 - z_2 = h_1$, $z_4 - z_3 = h_2$, $z_3 + z_2 = 20\text{cm}$
1°) Appliquer la relation fondamentale de la statique pour les trois fluides (eau, alcool, mercure).

Pour l'eau, on a:

$$p_3 = p_4 + \rho_{eau} g h_2 \quad ; p_3 = p_a + \rho_{eau} g h_2$$

60



Pour l'alcool, on a:

$$p_2 = p_1 + \rho_{al} g h_1 \quad ; p_2 = p_a + \rho_{al} g h_1$$

Pour le mercure, on a:

$$p_2 = p_3$$

2°) En déduire la masse volumique du mélange eau-alcool et celle du mercure.

On sait que:

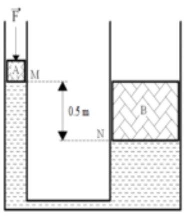
$$p_3 = p_1 = p_a \qquad p_3 = p_2 \qquad \rho_{al} = \rho_{eau}\frac{h_2}{h_1} = 800\text{kg/m}^3$$

3°) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4.

$$z_3 = z_2 = 0 \qquad z_1 = h_1 \qquad z_4 = h_2$$

61

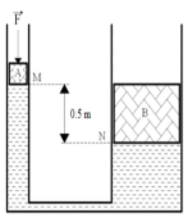
Exercice 8:



En négligeant le poids du cylindre A, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ qui assurera l'équilibre.
On donne
Les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de **40** et **4000 cm²**.
- Le cylindre B a une masse de **4000 kg**.
Le récipient et les conduites sont remplis d'huile de densité $\mathbf{d = 0.75}$.
$g = 9.81\ m/s^2$ est l'accélération de pesanteur.

62

Exercice 8:



En négligeant le poids du cylindre A, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ qui assurera l'équilibre.
On donne
Les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de **40** et **4000 cm²**.
- Le cylindre B a une masse de **4000 kg**.
Le récipient et les conduites sont remplis d'huile de densité $\mathbf{d = 0.75}$.
$g = 9.81\ m/s^2$ est l'accélération de pesanteur.

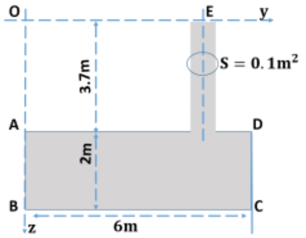
Déterminons l'intensité de la force qui assure l'équilibre

$$p_N = p_M + \rho_{huile} g h \qquad p_N = m_B g / S_B \qquad p_M = F/S_A \qquad F = \left(\frac{m_B g}{S_B} - d\rho_{eau} g h\right) S_A$$

$$F = 377,684N$$

63

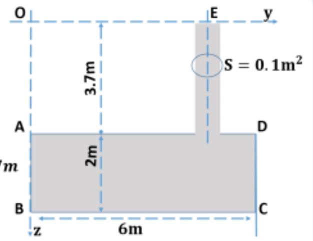
Exercice 9:



1°) Donner l'intensité et la position de la force de pression du liquide agissante sur la surface **AB** qui a **2.5 m** de largeur.
2°) Déterminer la force totale de pression exercée par le liquide sur la face inférieure **BC** du réservoir
3°) Déterminer la force totale de pression du liquide sur la face supérieure **AD** du réservoir.
4°) Calculer le poids total de l'eau dans le réservoir.

64

Exercice 9:



1°) L'intensité et la position de la force de pression agissante sur la surface AB qui a **2.5 m** de largeur.

$F_1 = \rho g h_G S \qquad h_G = 4,7m \qquad S = AB.l$

$$F = 235N$$

La position de la force qui assure l'équilibre

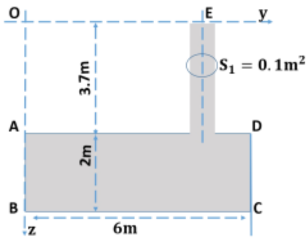
$z = z_G + \frac{I_{Gy}}{z_G S} \qquad I_{Gy} = \frac{l\,(AB)^3}{12} \qquad z = 4,77m$

2°) La force totale de pression exercée sur la parois BC

$F_2 = \rho g h_G S \qquad h_G = 5,7m \qquad S = AB.l$

$$F_2 = 855N$$

65



3°) La force totale de pression exercée sur la face AD du réservoir

$F_3 = \rho g h_G S \qquad h_G = 3,7m \qquad S = AD.l - S_1$

$$F_3 = 855N$$

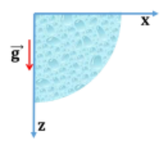
3°) Calcul du poids total de l'eau dans le réservoir

$P = \rho g V \qquad V = l.S + S_1.OA \qquad P = 303KN$

66

Exercice 10:

Un quart d'une sphère contient de liquide.
1°) Calculer les forces de surface appliquées sur la paroi de cette géométrie.
2°) Comparer le module de la résultante des forces de pression et le poids du fluide.



67

Exercice 10:

1°) Les forces surfaciques appliquées sur la paroi

$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 \qquad d\vec{F}_1 = p(z)dS\,\vec{n} \qquad d\vec{F}_2 = -p_0 dS\,\vec{n}$

$$d\vec{F} = \rho g z dS \vec{n}$$

Donc nous allons calculer l'intégrale de $d\vec{F}$

En coordonnées sphériques, on a $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$;

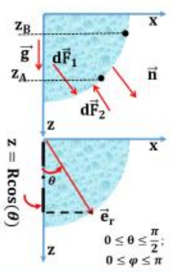
$d\vec{F} = \rho g z R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$; $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{k} + \sin(\theta)\vec{i}$

$$d\vec{F} = \rho g R^3 d\varphi(\sin(\theta)\cos^2(\theta) d\theta \vec{k} + \sin^2(\theta)\cos(\theta) d\theta \vec{i})$$

$$\vec{F} = \rho g \pi R^3 /3(\vec{k} + \vec{i})$$

2°) Comparaison de la résultante et le poids

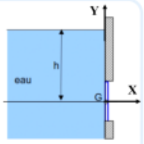
$V = \rho g \pi R^3 /3 \qquad P = mg = \rho V g \qquad F = \rho V g \sqrt{2}$



68

Exercice 11:

Une vanne de vidange est constituée par un disque de diamètre d pivotant autour d'un axe horizontal $(G, \vec{Z})$. Le centre G du disque est positionné à une hauteur $\boldsymbol{h = 15{,}3m}$ par rapport au niveau d'eau. On donne :



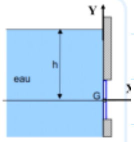
- la pression atmosphérique $\mathbf{p_{atm} = 1\ bar}$,
- le diamètre de la vanne : $\mathbf{d = 1m}$,
- l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g = 9{,}81\ m/s^2}$,
- la masse volumique de l'eau $\boldsymbol{\rho} \mathbf{= 1000\ kg/m^3}$

1°) Déterminer le poids volumique de l'eau.
2°) Déterminer la pression de l'eau au point G.
3°) Calculer l'intensité de la poussée de l'eau sur le disque.
4°) Calculer le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ du disque par rapport à $(G, \vec{Z})$.
5°) Calculer le moment $\vec{M}_G$ des forces hydrostatiques agissant sur le disque.
6°) Calculer la position **Y** de la poussée.

69

Exercice 14:

Une vanne de vidange est constituée par un disque de diamètre d pivotant autour d'un axe horizontal $(G, \vec{Z})$. Le centre G du disque est positionné à une hauteur $\boldsymbol{h = 15{,}3m}$ par rapport au niveau d'eau. On donne :



- la pression atmosphérique $\mathbf{p_{atm} = 1\ bar}$,
- le diamètre de la vanne : $\mathbf{d = 1m}$,
- l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g = 9{,}81\ m/s^2}$,
- la masse volumique de l'eau $\boldsymbol{\rho} \mathbf{= 1000\ kg/m^3}$

1°) Déterminons le poids volumique de l'eau.

$$\boldsymbol{\varpi = \rho g} \qquad\qquad \boldsymbol{\varpi = 9810 N/m^3}$$

2°) Déterminons la pression de l'eau au point G.

$$\mathbf{p_G = p_0 + \rho g h} \qquad\qquad \mathbf{p_G = 2{,}5}\ \boldsymbol{bar}$$

70

3°) Calcul de l'intensité de la poussée sur le disque.

$$\mathbf{F = p_G S = \frac{p_G \pi d^2}{4}} \qquad\qquad \mathbf{F = 1{,}96}\ \boldsymbol{N}$$

4°) Le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ du disque par rapport à $(G, \vec{Z})$ est défini par.

$$\mathbf{I_{(G,\vec{Z})} = \int y^2 dS = \int r^2 \sin^2(\theta) r dr d\theta = \int r^3\, dr \int \sin^2(\theta) d\theta} \qquad \mathbf{I_{(G,\vec{Z})} = \frac{\pi d^4}{64} = 0{,}049\ m^4}$$

5°) Calcul du moment $\vec{M}_G$ des forces agissant sur le disque.

$$\mathbf{\vec{M}_G(\vec{F}) = I_{(G,\vec{Z})} \varpi \vec{z}} \qquad\qquad \mathbf{|\vec{M}_G(\vec{F})| = 480{,}6}\ \boldsymbol{N.m}$$

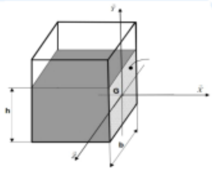
6°) Calculons la position **Y** de la poussée.

$$\boldsymbol{Y = -\frac{\varpi I_{(G,\vec{Z})}}{F}} \qquad\qquad \boldsymbol{Y = -2{,}44mm}$$

71

Exercice 12:

On considère un récipient en forme de parallélépipède de largeur $\mathbf{b = 2m}$, ouvert à l'air libre et rempli jusqu'à une hauteur $\mathbf{h = 1{,}5m}$ avec du mercure de masse volumique $\boldsymbol{\rho} \mathbf{= 13600\ kg/m^3}$. On désigne par :



- G le centre de gravité de la surface mouille S.
- $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ un R.O.D où $\vec{X}$ est orthogonal à S et $\vec{X}$ est vertical.

1°) En appliquant la RFH entre un point M de la surface libre et le point G, calculons p_G.

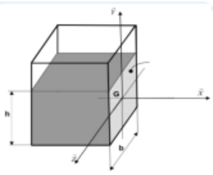
$$\mathbf{p_G = p_0 + \frac{\rho g h}{2}} \qquad\qquad \mathbf{p_G = 2,}\ \boldsymbol{bar}$$

2°) Calcul de l'intensité de la poussée (force hydrostatique).

$$\mathbf{F = p_G S = p_G b h} \qquad\qquad \mathbf{F = 6.10^5} \boldsymbol{N}$$

72

3°) Calcul du moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ de la surface S.



$$\boldsymbol{I_{G,z} = \frac{b\, h^3}{12}} \qquad\qquad \boldsymbol{I_{G,z} = 0{,}5625 m^4}$$

$$\mathbf{I_{(G,\vec{Z})} = \int y^2 dS = \int y^2 dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \int^{b/2} dz}$$

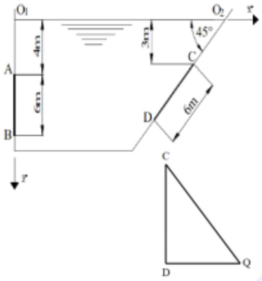
6°) La position **Y** de la poussée.

$$\boldsymbol{Y = -\frac{\varpi I_{(G,\vec{Z})}}{F}} \qquad\qquad \boldsymbol{Y = -0{,}125m}$$

73

Exercice 13:

Soit le barrage de la figure ci-dessous comporte deux portes d'évacuation d'eau **AB** et **CD**, comme l'indique la figure. La porte en **AB** forme une surface rectangulaire de largeur **3m** et la porte en **CD** forme une surface plane triangulaire de base **4m**. Soit $\mathbf{I_{G_y}} = \frac{\mathbf{b\,h^3}}{\mathbf{36}}$ pour un triangle rectangle.



1°)Calculer la résultante des efforts de pression $\vec{R}_1$ appliquée par l'eau sur la surface **AB**.

2°)Donner le centre de la résultante $\vec{R}_1$de pression.

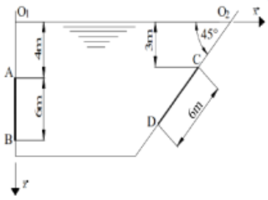
3°)Calculer la résultante des efforts de pression $\vec{R}_2$appliquée par l'eau sur la surface **CD**.

4°)Donner le centre de la résultante $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$ de pression.

5°) Calculer les deux composantes $\vec{R}_{2x}$ et $\vec{R}_{2z}$.

74

Soit le barrage de la figure ci-dessous comporte deux portes d'évacuation d'eau **AB** et **CD**, comme l'indique la figure. Connaissant que la porte en **AB** forme une surface rectangulaire de largeur **3m** et la porte en **CD** forme une surface plane triangulaire de base **4m**.



1°)Calculons la résultante des efforts de pression $\vec{R}_1$appliquée par l'eau sur la surface **AB**.

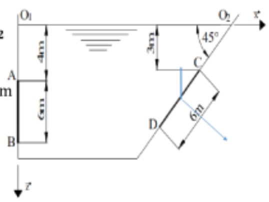
$\boldsymbol{R_1 = \rho g h_{G_1} S_1}$ $\quad \mathbf{h_{G_1} = 7m}$ $\quad \boldsymbol{S_1} = \mathbf{AB.l}$ $\quad \boldsymbol{R_1 = 1236KN}$

1°) Le centre de la poussée

$$\mathbf{z_1} = \boldsymbol{z_{G_1}} + \frac{\boldsymbol{I_{G_1x}}}{\boldsymbol{z_{G_1}S_1}} \qquad \boldsymbol{I_{G_1x}} = \frac{\boldsymbol{l\,(AB)^3}}{\mathbf{12}} \qquad \boldsymbol{z_1 = 7,42m}$$

75

3°)Calculons la résultante des efforts de pression $\vec{R}_2$ appliquée par l'eau sur la surface **CD**.



$$\boldsymbol{R_2 = \rho g h_{G_2} S_2} \qquad \mathbf{h_{G_2} = h_C} + \frac{\mathbf{2CD}}{\mathbf{3}}\sin(45°) = 8{,}485\text{m}$$

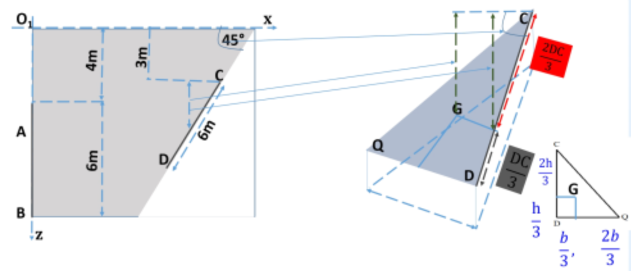
$$\boldsymbol{S_2} = \frac{\mathbf{DQ.CD}}{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{R_2 = 335,96KN}$$

4°)Le centre de la résultante $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$ de pression.

$$\mathbf{z_2} = \boldsymbol{z_{G_2}} + \frac{\boldsymbol{I_{Gy}}}{\boldsymbol{z_{G_2}S_2}} \qquad \boldsymbol{I_{G_2y}} = \frac{\boldsymbol{b\,h^3}}{\mathbf{36}} \qquad \boldsymbol{z_1 = 8,72m}$$

5°) Comparaison des deux composantes de $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$.

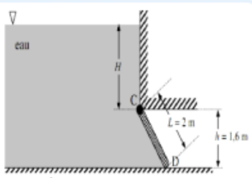
$\boldsymbol{R_{2x} = R_2 cos(45°)}$ $\quad \boldsymbol{R_{2z} = R_2 sin(45°)}$ $\quad \boldsymbol{R_{2z} = R_{2x}}$



76

Exercice 14:

La porte rectangulaire **CD** a pour longueur $\boldsymbol{L} = \mathbf{2m}$ et largeur $\mathbf{l = 1,8m}$, son épaisseur étant négligeable, on donne la masse surfacique du matériau homogène : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{5110\,kg.m^{-2}}$. Cette porte a la possibilité de pivoter autour de l'axe **C**. On se propose de déterminer la hauteur d'eau **H** à partir de laquelle la porte s'ouvre pour laisser l'eau s'écouler.



1°) Déterminer la force de pression hydrostatique s'exerçant sur la porte.

2°) Déterminer la position du point d'application de cette force.

3°) Calculer, d'une part le moment de la force hydrostatique par rapport à l'axe de rotation, et d'autre part le moment du poids de la porte par rapport à l'axe de rotation. En déduire la hauteur d'eau H nécessaire pour qu'il y'ait ouverture automatique de la porte.

77

1°) Déterminons la force de pression hydrostatique s'exerçant sur la porte.

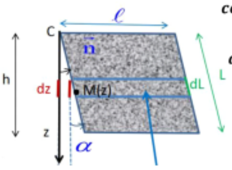
Les forces surfaciques appliquées sur la paroi (la porte CD)

$$\mathbf{d\vec{F}} = \mathbf{d\vec{F}_1} + \mathbf{d\vec{F}_2} \qquad \mathbf{d\vec{F}_1} = \mathbf{p(z)dS\,\vec{n}} \qquad \mathbf{d\vec{F}_2} = -\mathbf{p_0 dS\,\vec{n}} \qquad \mathbf{d\vec{F}} = \mathbf{(p_M - p_0)dS\vec{n}}$$

Donc nous allons calculer l'intégrale de $\mathbf{d\vec{F}}$. Pour ce faire, il faut tout d'abord calculer la pression $\mathbf{p_M}$ en appliquant la R.F.S entre un point M de la porte et la surface libre

$$\mathbf{p_0 - \rho g(-H) = p_M - \rho g z} \qquad \mathbf{p_M = p_0 + \rho g(z + H)} \qquad \mathbf{d\vec{F} = \rho g(z + H)dS\vec{n}}$$

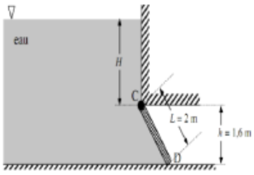
78



$$cos(\alpha) = \frac{dz}{dL} = \frac{h}{L}$$

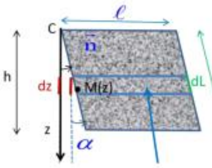
$$dS = l dL = \frac{Sdz}{h}$$

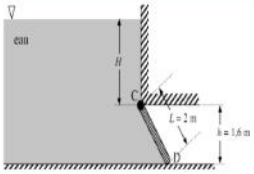
$$\mathbf{d\vec{F} = \rho g(z + H)dS\vec{n}}$$



$$\mathbf{\vec{F} = \rho g \int (z + H)dS\vec{n} = \rho g \int (z + H)\frac{Sdz}{h}\vec{n} = \frac{\rho g S}{h}(\frac{h^2}{2} + Hh)\vec{n} = \rho g S(\frac{h}{2} + H)\vec{n} = \rho g h_G S\vec{n}}$$

79





2°) Déterminons la position du point d'application de cette force.

$$\mathbf{|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}| = \left|\int |\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}|\right|}$$

$$\mathbf{|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}| = |\overrightarrow{OA}|.|\vec{F}|} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{OA.\rho g h_G S}$$

$$\int |\overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{d\vec{F}}| = \int |\overrightarrow{OM}|.|\mathbf{d\vec{F}}| = \int OM.\rho g(H + z)dS$$

80

$$OM = \frac{z}{cos(\alpha)} = \frac{z}{h}L$$

$$\int OM.\rho g(H + z)dS = \frac{\rho g L S}{h^2}\int z(H + z)dz$$

$$\mathbf{OA.\rho g h_G S = \frac{\rho g L S}{h^2}(\frac{Hh^2}{2} + \frac{h^3}{3})}$$

$$\mathbf{OA = \frac{L}{h_G}(\frac{H}{2} + \frac{h}{3})}$$

3°) Calculons, d'une part le moment de la force hydrostatique par rapport à l'axe de rotation, et d'autre part le moment du poids de la porte par rapport à l'axe de rotation. En déduire la hauteur d'eau H nécessaire pour qu'il y'ait ouverture automatique de la porte.

Rappel: Le moment d'une force par rapport à un axe défini par un point et dirigé par un vecteur $\vec{u}$ est donné par : $\overrightarrow{M}(\vec{F}).\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}.\vec{u}$

L'axe de rotation de la porte passe par le point C

81

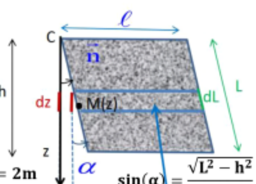
Le moment de la force hydrostatique par rapport à l'axe de rotation est donc

$$\mathbf{\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}.\vec{u} = \frac{L}{h_G}\left(\frac{H}{2} + \frac{h}{3}\right)\rho g S h_G = \rho g L S(\frac{H}{2} + \frac{h}{3})}$$

3°) Calculons le moment du poids de la porte par rappor à l'axe de rotation.

$$\mathbf{\overrightarrow{M}(\vec{P}).\vec{u} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}.\vec{u} = \frac{L}{2}mgsin(\alpha)}$$

$$\mathbf{\overrightarrow{M}(\vec{P}).\vec{u} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}.\vec{u} = \frac{L}{2}mgsin(\alpha) = mg\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{2}}$$



Pour que la porte s'ouvre automatiquement, il faut que

$$\mathbf{\rho g S L(\frac{H}{2} + \frac{h}{3}) > mg\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{2}} \qquad \mathbf{H > \frac{\sigma}{\rho}\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} - \frac{2h}{3} = 2m}$$

$$\mathbf{m = \sigma S} \qquad \mathbf{sin(\alpha) = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}}$$

82

Exercice 16:

On considère une fosse océanique de profondeur $\mathbf{H = 10km}$. La pression à la surface de l'eau est $\mathbf{p_0 = 1bar}$ et on supposera la température uniforme et égale à $\boldsymbol{T_0}$.
1) Calculer la pression $\mathbf{p}(\boldsymbol{H})$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible.
2) On veut déterminer $\mathbf{p}(\boldsymbol{H})$ en tenant compte de la compressibilité de l'eau. On doit donc considérer que la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ de l'eau dépend maintenant de la profondeur $\boldsymbol{z}$ (prise nulle à la surface libre de l'eau). On notera $\boldsymbol{\rho_0}$ la masse volumique de l'eau à la surface.
a) Montrer que le coefficient de compressibilité isotherme peut s'écrire:
$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$. Que devient cette expression puisque $\mathbf{T = T_0 = cste}$? En déduire $\mathbf{d\rho/dz}$
b) Déduire de la question précédente les expressions de $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z})$, puis de $\mathbf{p}(\mathbf{z})$
c) Calculer $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{H})$ et $\mathbf{p}(\boldsymbol{H})$ avec $\boldsymbol{\chi_T = 4,9.10^{-10}Pa^{-1}}$.

83

Exercice 16:

1°) Calculer la pression $\mathbf{p}(\boldsymbol{H})$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible.
D'après l'équation d'hydrostatique on a :

$$\boldsymbol{p(z) = p_0 + \rho g z} \qquad \boldsymbol{p(H) = p_0 + \rho g H} \qquad \boldsymbol{p(H) = 9,8\,.\,10^2\ bars}$$

2-a°) Le coefficient de compressibilité isotherme s'écrit comme suit: $\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$.

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{-m}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad \chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \qquad \chi_T \rho dp = d\rho$$

Pour une température constante l'expression de compressibilité devient:

$$\boldsymbol{d\rho/\rho^2 = \chi_T g dz} \qquad \boldsymbol{d\rho/dz = \chi_T g \rho^2}$$

2-b°) Calcul de $\boldsymbol{\rho(z)}$ et $\boldsymbol{p(z)}$

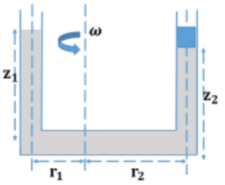
$$\boldsymbol{\rho(z) = \frac{\rho_0}{1-\rho_0\chi_T g z}} \qquad \boldsymbol{dp = \frac{-1}{\chi_T}\frac{d(1-\rho_0\chi_T g z)}{1-\rho_0\chi_T g z}} \qquad \boldsymbol{p(z) = p_0 + \frac{1}{\chi_T} ln(\frac{1}{1-\rho_0\chi_T g z})}$$

2-c°) Calcul de $\boldsymbol{\rho(H)}$ et $\boldsymbol{p(H)}$ $\qquad \boldsymbol{\rho(H) = 1050,44\ kg/m^3} \qquad \boldsymbol{p(H) = 10,05\,.\,10^2\ bars}$

84

Exercice 15:

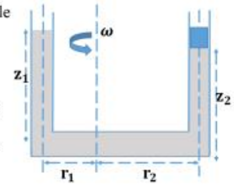
Un tuyau en U dont la géométrie est donnée dans la figure avec un diamètre d. A l'une de ses extrémités un bouchon bloque le mouvement de l'eau vers l'extérieur, tandis que l'autre extrémité est libre. On suppose que $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{z_1}$, $\boldsymbol{z_2}$ et $\boldsymbol{\rho}$ sont donnés et le fluide se comporte comme un solide rigide lors de rotation. Trouver:



1°) La vitesse angulaire autour de l'axe qui libérera le bouchon, si la force requise pour le retrait est F.
2°) Après un temps suffisamment long après la sortie, rechercher les hauteurs finales du fluide.

85

1°) La vitesse angulaire autour de l'axe qui libérera le bouchon, si la force requise pour le retrait est F.
L'équation hydrostatique de ce problème est donnée par:



$$\rho\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \rho\vec{\gamma}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \begin{cases}\frac{\partial p}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\ \frac{\partial p}{\partial z}\end{cases} ;\ \begin{cases}\frac{\partial p}{\partial z} & = & -\rho g\\ \frac{\partial p}{\partial r} & = & \rho\omega^2 r\end{cases}$$

L'intégration de cette équation donne

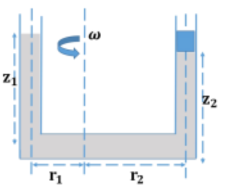
$$p(r,z) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c$$

Deux inconnues sont déterminées par ces conditions aux limites $p(r_1, z_1)$ et $p(r_2, z_2)$

$$\omega = \sqrt{2\frac{p_0 - \frac{4F}{\pi d^2} + \rho g(z_1 - z_2)}{\rho(r_1^2 - r_2^2)}}$$

86

2°) Jusqu'à présent, le bouchon bloquait l'écoulement de l'eau à l'extérieur. Une fois le bouchon retiré, l'eau peut désormais s'écouler vers l'extérieur, dont la dynamique ne nous intéresse pas.
Nous nous intéressons à ce qui se passe après un temps suffisamment long lorsque le système a atteint un nouvel équilibre. Les nouvelles conditions aux limites sont:



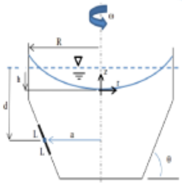
$$p(r_1, z_1) = p_0 ;\ p(r_1, z_1) = \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2} - \rho g z_1 + c' ;$$
$$p(r_2, z_2) = p_0 ;\ p(r_2, z_2) = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2} - \rho g z_2 + c'$$

Donc on obtient l'une des deux hauteurs en fonction de l'autre. Soit

$$z_1 = \frac{\omega^2}{2g}(r_1^2 - r_2^2) + z_2$$

87

Exercice 15:



Un réservoir cylindrique avec une porte de 2L est rempli d'eau. La porte peut tourner autour de son axe qui est situé au rayon **a** et à la profondeur **d** par rapport à la hauteur initiale de l'eau. Supposons que le rayon du réservoir soit suffisamment grand pour que la porte puisse être supposée plate. Le réservoir tourne avec une vitesse angulaire constante. En supposant que

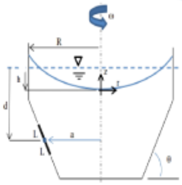
- le fluide se déplace comme un corps solide.
- La porte est plate.
- La surface de l'eau reste dans le cylindre de rayon constant.
- Le système de coordonnées est défini au bas de la surface de l'eau pendant la rotation.

1°) Calculer la répartition de la pression dans le réservoir.

2°) Quelle est la distance **h** entre les hauteurs initiale et finale de l'eau sur l'axe de symétrie?

88

Exercice 15:



1°) la répartition de la pression dans le réservoir.

L'équation d'hydrostatique pour un fluide uniformément accéléré s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \end{cases} ;\ p = p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C(z)\ ;\ \frac{\partial p}{\partial z} = C'(z) = \rho g$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = C'(z) = \rho g\ ;\ C(z) = \rho g z + C\ ;\ p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z + C$$

Tenant compte des conditions aux limite ($p(0,0) = p_0$) on aura $C = p_0$ donc

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z + p_0$$

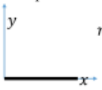
89

Rappel sur le calcul du centre d'inertie d'un solide :

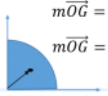
2°) Soit G le centre d'inertie d'un solide. Le point G vérifie la relation suivante

$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm \qquad dm = \lambda dl \qquad dm = \sigma dS \qquad dm = \rho dV$$

Exemples : barre, Quart de disque, demi-disque, triangle rectangle, rectangle, cylindre



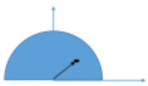
$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int x\vec{\imath} dm + y\vec{\jmath} dm = \frac{m}{l}\int x dx \vec{\imath}$$



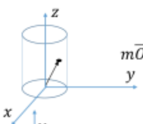
$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int r\cos(\theta)\vec{\imath} dm + r\sin(\theta)\vec{\jmath} dm \qquad dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \sigma \int r^2 dr\cos(\theta) d\theta \vec{\imath} + r^2 dr \sin(\theta) d\theta \vec{\jmath} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{4R}{3\pi}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

90



$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int r\cos(\theta)\vec{\imath} dm + r\sin(\theta)\vec{\jmath} dm$$

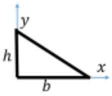


$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int r\vec{e}_r dm + z\vec{k} dm \qquad dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$$

$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int \rho r^2 dr(\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \cos(\theta)\,\vec{\imath}) d\theta dz + z\rho r dr d\theta dz\,\vec{k}$$

$$m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM} dm = \int x\vec{\imath} dm + y\vec{\jmath} dm \qquad dm = \sigma dx dy$$

91



$$y = -\frac{h}{b}x + h \qquad x = -\frac{b}{h}y + b$$

$$m\overrightarrow{OG} = \sigma\left(\int x dx dy \vec{\imath} + y dx dy \vec{\jmath}\right) = \sigma\left(\int x\left(-\frac{h}{b}x + h\right) dx \vec{\imath} + y\left(-\frac{b}{h}y + b\right) dy \vec{\jmath}\right)$$

$$m\overrightarrow{OG} = \frac{m}{S = bh/2}\left(\int_0^b \left(-\frac{h}{b}x^2 + hx\right) dx \vec{\imath} + \int_0^h \left(-\frac{b}{h}y^2 + by\right) dy \vec{\jmath}\right)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{bh}\left(\frac{hb^2}{6}\vec{\imath} + \frac{bh^2}{6}\vec{\jmath}\right) \qquad x_G = \frac{b}{3} \qquad y_G = \frac{h}{3}$$

92

Exercice 15:

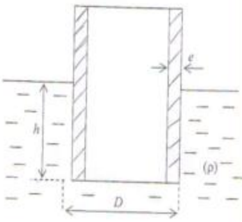
Un cylindre creux de la hauteur $\boldsymbol{H}$, de diamètre extérieur **D** et d'épaisseur $\boldsymbol{e}$, flotte en position verticale dans un bassin d'eau de masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

1°) Déterminer la hauteur h si la densité du cylindre est $\boldsymbol{\delta = 7,6}$.

2°) Si on introduit une quantité de sable dans le cylindre, quelle serait la quantité nécessaire à introduire que la totalité du cylindre soit immergée.

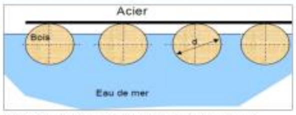
On donne:

$\boldsymbol{g = 9,\frac{81m}{s^2}}$; $\boldsymbol{D = 40cm}$; $\boldsymbol{e = 5mm}$; $\boldsymbol{H = 1m}$



93

Exercice 15:



On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de 4 poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.

On donne:

- les dimensions d'une poutre: diamètre $d = 1m$ et longueur $L = 5m$,
- la masse volumique du bois : $\rho = 700kg/m^3$
- la masse volumique de l'eau de mer: $\rho = 1027kg/m^3$
- la masse de la plaque $m_p = 3t$,
- l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}81m/s^2$.

1) Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.

2) Ecrire l'équation d'équilibre de la plate-forme.

3) En déduire la fraction $F(\%)$ du volume immergé des poutres.

4) Déterminer la masse M_c maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger.

Mécanique des fluides et mathématiques faciles.

- 3/ P_{ARCH}= poids du volume d'eau déplacé
- $P_{arch=}4.\rho_{eau}\, V_{immergé}.\, g = P_0$
- $V_{immergé} = \frac{P_0}{4.\rho_{eau}\cdot g}$
- La fraction du volume immergé :
- F (%) $= \frac{V_{Immergé}}{V_{Poutre}}$ .100
- $V_{Immergé} = \frac{137293{,}40}{4.1027.9{,}81}$ =3.406 m^3
- V_{Poutre} = 4x$\frac{\pi.d^2}{4}.L$
- V_{Poutre} =15.70 m^3
- F (%) $= \frac{V_{Immerge}}{V_{Poutre}}$ .100 =$\frac{3.406}{15.70}$ .100 =21.70 %

Mécanique des fluides et mathématiques faciles.

- 4/Poutre complètement immergée : F(%)=100 % c'est-à-dire Vimmergé=Vpoutre c.à.d
- $\frac{P_0}{4.\rho_{eau}\cdot g}$ =4x$\frac{\pi.d^2}{4}.L$
- $P_0 = 4.\rho_{eau}\cdot g.\pi.d^2.L$
- (M_{pmax}+4$\rho_{bois}.\frac{\pi.d^2}{4}.L$).g= $4.\rho_{eau}\cdot g.\pi.d^2.L$
- M_{pmax}.g= $4.\rho_{eau}\cdot g.\pi.d^2.L-4\rho_{bois}.\frac{\pi.d^2}{4}.L.g$
- M_{pmax}=$\frac{1}{g}$($4.\rho_{eau}\cdot g.\pi.d^2.L-4\rho_{bois}.\frac{\pi.d^2}{4}.L.g$)
- M_{pmax}= ($4.\rho_{eau}\,.\pi.d^2.L$-4$\rho_{bois}.\frac{\pi.d^2}{4}.L$)
- **M**$p_{max} = \pi.d^2.L\,(4.\rho_{eau}$-$\rho_{bois})$
- AN: M_{pmax}=3, 14x1^2.5 (4.1027-700)
- M_{pmax}=53531,16 kg, donc : M_{pmax}=53,53 t