Séance 1 - Exercices : Statique des fluides

samedi 11 mars 2023   18:56

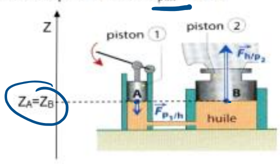
1 ***ENONCE***

La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire.

Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit, au point (A), par une force de pression $\vec{F}_{p_1/h}$ sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force $\vec{F}_{h/p_2}$

On donne :

- les diamètres de chacun des pistons : D_1 = 10 mm; D_2 = 100 mm.
- l'intensité de la force de pression en A : $F_{p1/h}$ = 150 N.



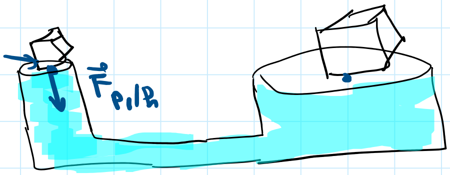
Travail demandé :

1) Déterminer la pression P_A de l'huile au point A.

2) Quelle est la pression P_B ?

3) En déduire l'intensité de la force de pression $F_{h/p2}$.

1. S_1



$z_A = z_B$

$$p_A = \frac{\|\vec{F}_1\|}{S_1} \qquad S_1 = \pi \frac{D_1^2}{4}$$

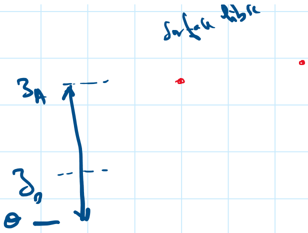
2. $$p_B = \frac{\|\vec{F}_2\|}{S_2} = p_A \ ? \qquad p_B = p_A + \rho g (\overset{=0}{z_B - z_A})$$

3) $$\|\vec{F}_2\| = \pi \frac{D_2^2}{4} \times p_B$$

surface libre

z_A

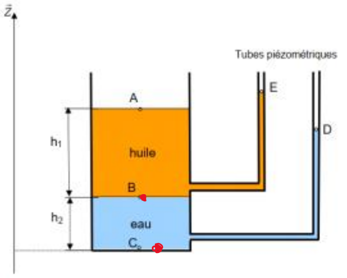
1. en appliquant RFS : entre A et B :



1 ***ENONCE***

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique ρ_1=850 kg/m^3 sur une hauteur h_1=6 m,
- de l'eau de masse volumique ρ_1=1000 kg/m^3 sur une hauteur h_2=5 m.



On désigne par:

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézimétriques,
- (O, $\vec{z}$) est un axe vertical tel que Z_C=O.

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points:

1) B et A. En déduire la pression P_B (en bar) au point B.

2) A et E. En déduire le niveau de l'huile Z_E dans le tube piézométrique.

3) C et B. En déduire la pression P_C (en bar) au point C.

4) C et D. En déduire le niveau de l'eau Z_D dans le tube piézométrique.

1. en appliquant RFH : entre A et B :

$$P_B - P_A = \rho g (z_A - z_B)$$

or $P_A = P_{atm}$ (surface libre)

$$P_B = P_{atm} + \rho g h_1 \sim 1.5 \text{ bar}$$

2) entre A et E :

$$P_A - P_E = \rho_h g (z_E - z_A)$$

$$0 = \rho_h g (z_E - z_A) \Rightarrow z_E = z_A$$

$$z_E = z_A = h_1 + h_2$$

3) entre B et C :

$$P_C - P_B = \rho_{eau} g \cdot (z_B - z_C)$$

$$P_C = P_B + \rho_e \cdot g \cdot h_2 .$$

$$P_C = 2 \text{ bar}$$

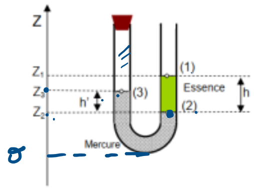
4) $P_D = P_{atm}$

$$P_C - P_D = \rho_e \cdot g \cdot (z_D)$$

$$z_D = \frac{P_C - P_D}{\rho_e \cdot g}$$

1 *ENONCE*

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{essence}$=700 kg/m^3.
- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{mercure}$=13600 kg/m^3.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est $P_1=P_{atm}$=1 bar.

L'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s^2.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_3 qu'on cherche à calculer.

1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression P_2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que h= (Z_1-Z_2)= 728 mm.

2) De même, pour le mercure, calculer la pression P_3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que h'= (Z_3-Z_2)= 15 mm.

$P = 0$: (vide)

1) $P_2 - P_1 = \rho_{essence} \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$

$P_2 = P_1 + \rho_e \cdot g \cdot h \qquad (P_1 = P_{atm})$

$P_2 = P_{atm} + \rho_e \cdot g \cdot h = 1.05 \cdot 10^5$ Pa

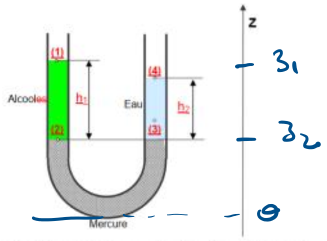
$= 1050$ mbar.

2) P_3 : entre (2) et (3) :

$P_3 - P_2 = \rho_{mer} \cdot g \cdot (z_2 - z_3)$

$P_3 = P_2 - \rho_{mer} \cdot g \cdot h' \simeq 1.03 \cdot 10^5$ Pa.

1 *ENONCE*



Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur h_1=30 cm. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique 1000 kg/m^3, jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau h_2=24 cm.

1) Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.

2) En déduire la masse volumique du mélange eau – alcool éthylique.

(1) et (2) :

$$P_2 - P_1 = \rho_{Alcool} \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$$

$P_1 = P_{atm}$ (sur surface libre)

$$P_2 - P_1 = -\rho_{Alcool} \cdot g \cdot h_1$$

(2) et (3) : $P_2 = P_3$. $(z_2 = z_3)$.

(3) et (4) : $P_3 - P_4 = \rho_{eau} \cdot g \cdot h_2$.

$$\begin{cases} P_2 - P_0 = \rho_{alcool} \cdot g \cdot h_1 \\ P_2 - P_0 = \rho_{eau} \cdot g \cdot h_2 \end{cases}$$

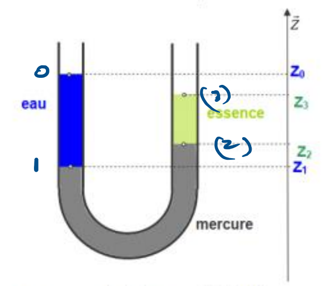
$$(\cancel{P_2} - P_0) - (\cancel{P_2} - P_0) = (\rho_{alcool} h_1 - \rho_{eau} h_2) g$$

$$\rho_{alcool} h_1 = \rho_{eau} h_2$$

$$\rho_{alcool} = \rho_{eau} \cdot \frac{h_2}{h_1}$$

AN : $\rho_{Alcool} = 1000 \, \frac{24}{30} = 800 \, kg/m^3$

On considère un tube en U contenant trois liquides:



- de l'eau ayant une masse volumique ρ_1 = 1000 kg/m^3,

1) on appliquant KFS :

$$\cancel{P_1} - \cancel{P_{atm}} = \rho_1 \, g . (z_0 - z_1)$$

$$\cancel{P_2} - \cancel{P_1} = \rho_2 \cdot g \, (z_1 - z_2)$$

$$\cancel{P_{atm}} - \cancel{P_2} = \rho_3 \, g \, (z_2 - z_3)$$

- de l'eau ayant une masse volumique ρ_1 = 1000 kg/m^3,
- du mercure ayant une masse volumique ρ_2 = 13600 kg/m^3,
- de l'essence ayant une masse volumique ρ_3 = 700 kg/m^3.

On donne :

$Z_0 - Z_1 = 0{,}2$ m ✓✓
$Z_3 - Z_2 = 0{,}1$ m ✓
$Z_1 + Z_2 = 1{,}0$ m

On demande de calculer Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3.

$$z_3 = 0.1 + z_2$$

$$z_0 = 0.2 + z_1$$

$$\cancel{P_{atm}} - \cancel{P_2} = \rho_3 g (z_2 - z_3)$$

$$\rho_1 g (z_0 - z_1) + \rho_2 g (z_1 - z_2) + \rho_3 g (z_2 - z_3) = 0$$

$$\rho_1 \cancel{g} \cdot 0.2 + \rho_2 \cancel{g} (z_1 - z_2) - \rho_3 \cancel{g}\, 0.1 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = \rho_3 \times 0.1 - \rho_1 \times 0.2 \\ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

$$2 z_1 = 0.1 \times \rho_3 - 0.2 \cdot \rho_1 + 1$$

$$z_1 = \frac{1}{2} (0.1\, \rho_3 - 0.2\, \rho_1 + 1)$$

$$z_2 = 1 - z_1$$

$$z_2 = 1 - \frac{1}{2} (0.1\, \rho_3 - 0.2\, \rho_1 + 1)$$

2.3 Pression dans des réservoirs

En utilisant les données reportées sur la figure ci-dessous, calculer la différence de pression entre les deux réservoirs.

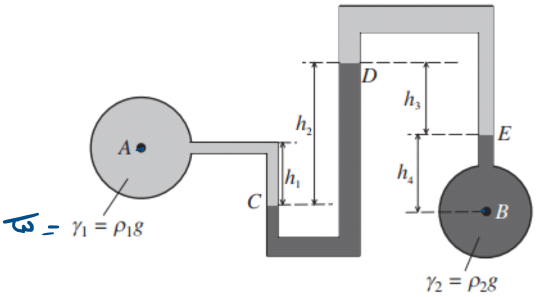


Figure 2.12 – h_1 = 2 cm, h_2 = 8 cm, h_3 = 5 cm, h_4 = 1 cm, ρ_1 = 1,225 kg·m^{-3}, ρ_2 = 1 000 kg·m^{-3}, g = 9,81 m·s^{-2}.

$p_A - p_B = ??$

$p_A - \cancel{p_C} = -\gamma_1 h_1$

$\cancel{p_C} - \cancel{p_D} = \gamma_2 h_2$

$\cancel{p_D} - \cancel{p_E} = -\gamma_1 . h_3$

$\cancel{p_E} - p_B = -\gamma_2 h_4$

$p_A - p_B = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_3 - \gamma_2 h_4$

$\Delta p = \gamma_1(-h_1 - h_3) + \gamma_2(h_2 - h_4)$

AN : $\Delta p = 685.85$ Pa.

Ex. 1

On considère la relation

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$ ✓

représentant l'influence de l'altitude sur la pression au sein d'un fluide, dans le champ de pesanteur d'intensité g.

1) Cette relation est valable quel que soit le fluide considéré.

2) L'axe Oz envisagé est nécessairement orienté vers le haut.

3) Entre deux points A et B du fluide, on peut déduire la relation $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$ quel que soit le fluide considéré.

4) Pour un gaz parfait de masse molaire M, cette relation conduit nécessairement à :

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right).$$ ✓

1) Vrai,

2) Vrai

3) $p_A - p_B = \rho g (z_B - z_A)$: fluide incompressible.

Faux.

4) Faux, gaz parfait + T = cte (isotherme)

Ex. 4 Récipients de sections différentes

Deux récipients A et B de sections constantes respectives $S_A = 40\ \text{cm}^2$ et $S_B = 10\ \text{cm}^2$ communiquent à leur base par un tube fin. Ils contiennent initialement un volume d'eau suffisant pour que, au cours des expériences suivantes, il y ait toujours de l'eau dans chacun des deux récipients.

1) On verse un volume $V = 0{,}02\ \text{L}$ d'huile dans le récipient A. Déterminer la dénivellation entre les deux surfaces libres.

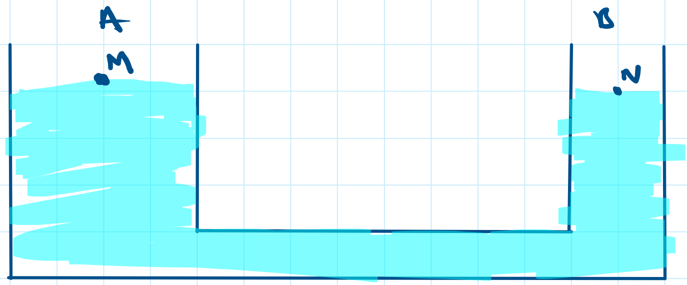
2) Quelle serait cette dénivellation si on avait versé l'huile dans le récipient B ?

Données :

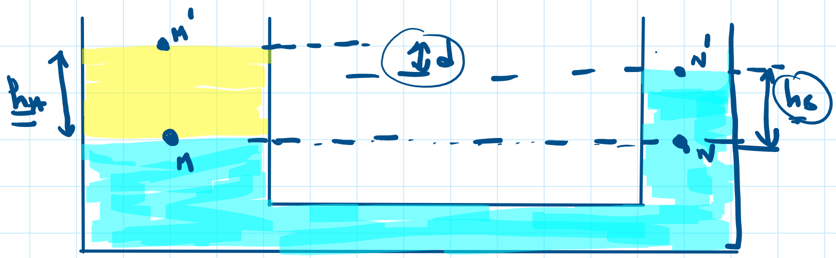
Masses volumiques :

– de l'eau $\rho_e = 1\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$;

– de l'huile $\rho_h = 0{,}9\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.



$$V_{huile} = S_A \cdot h_A$$



$$h_A = \frac{V}{S_A} = \frac{20}{40} = 5\ \text{cm}.$$

$$P_{M'} = P_{N'} = P_{atm}$$

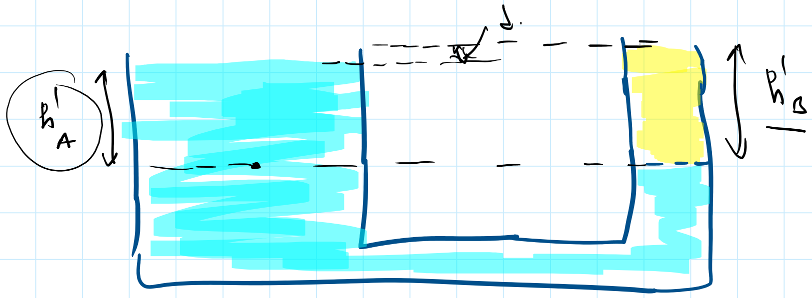
$$P_M = P_N$$

$$\begin{cases} P_M - P_{M'} = \rho_h \cdot g \cdot h_A \\ P_N - P_{N'} = \rho_e \cdot g \cdot h_B \end{cases}$$

$$\rho_e \cdot g \cdot h_B = \rho_h \cdot g \cdot h_A$$

$$h_B = \frac{\rho_h}{\rho_e} h_A = 4{,}5\ \text{cm}.$$

$$d = h_B - h_A = 0{,}5\ \text{cm}.$$



Ex. 9 Variation de *g* avec l'altitude

Dans le modèle d'atmosphère isotherme, à la température T, on considère ici que l'accélération de la pesanteur g varie avec l'altitude suivant la relation :

$g(z) = g_0 \cdot \left(\dfrac{R_t}{R_t + z}\right)^2$, R_t représentant le rayon de la Terre.

Au niveau du sol ($z = 0$), on note g_0 l'accélération de la pesanteur et p_0 la pression.

Déterminer la loi de variation $p(z)$ dans ces conditions.