Les séries numériques

vendredi 17 février 2023 14:40

I - Généralités:

Déf: 1) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

- S_n est la somme partielle de rang n.
- U_n est nommé le terme général de série

2) la serie $\sum_{n\geq 0} U_n$ est converge si la suite (S_n) c.v

et dans ce cas. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$.

- la serie $\sum_{n\geq 0} U_n$ est diverge si (S_n) est diverge.

(3) Deux séries sont dites de même type si elles sont les deux c.V ou bien toutes les deux d.V.

Propsion: Soit $n_0\in\mathbb{N}$ alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq n_0} U_n$ sont de même type.

Condition nécessaire de c.v.

$$\sum_{n\geq 0} U_n \text{ c.V} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

Exemple :

$\sum_{n\geq 0} \cos(n)$ d.v. car $\cos(n) \not\longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)}{n^2+2}$ d.v car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2+2} = 1 \neq 0$.

Reste:

$\sum_{n\geq 0} U_n$ c.v , On appelle reste de rang n:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \qquad S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n.$$

proposition: $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

proposition: Soit $\lambda \neq 0$. alors les deux séries

Proposition : Soit $\lambda \neq 0$. alors les deux séries

$$\sum_{n\geq 0} U_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \lambda U_n \quad \text{sont de même type.}$$

Cas complexe :

$$\sum_{n\geq 0} W_n \text{ c.V} \iff \begin{cases} \sum_{n\geq 0} Re(W_n) \text{ c.V} \\ \text{et} \\ \sum_{n\geq 0} Im(W_n) \text{ c.V} \end{cases}$$

Séries à terme positifs : ($U_n \geq 0$)

th : $0 \leq U_n \leq V_n$. alors :

(1) $\sum_{n\geq 0} V_n$ c.V $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} U_n$ c.V

(2) $\sum_{n\geq 0} U_n$ d.V $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} V_n$ d.V.

Exemple : M. que $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n-1+\cos(n)}$ est d.V.

On a : $n-1+\cos(n) \geq n-2 \geq 0$ d'où $U_n \geq 0$.

$-1+\cos(n) \leq 0$, donc $0 \leq n-1+\cos(n) \leq n$.

$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1+\cos(n)}$ • comme $\sum_{n\geq 3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ d.V. alors $\sum_{n\geq 3}^{+\infty} U_n$ est d.V

th : si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \ell \neq 0$. alors.

$\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de même type.

Corollaire : si $U_n \sim V_n$ alors - ($U_n, V_n \geq 0$.)

$\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même type.

Exemple :

• $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. ; $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{\;}\right)$ c.V car $\sum \frac{1}{\;}$ c.V

$n \geq 1$

donc $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ c.V car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ c.V

- $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n}} - 1$; $\forall n \geq 1$ on a : $e^{1/n} - 1 > 0$

et $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ d.v.

donc $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n}} - 1$ d.V

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0} \cdot \frac{1}{1-q}$$

Séries particulier :

$\sum_{n\geq 0} q^n$ c.V $\iff |q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ c.V $\iff \alpha > 1$

Regle de Riemann : « x^α »

si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = 0$

alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ c.V

exemple : $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ c.V car $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$

Regle de cauchy : si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$ alors.

(1) si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} U_n$ c.V.

(2) si $\ell > 1$, la série $\sum U_n$ d.V.

exemple : si $U_n = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{e} < 1$

donc $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ c.V

Regle de d'Alembert : si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$ alors :

Regle de d'Alembert: si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$. alors:

(1) si $\ell < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ c.v

(2) si $\ell > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ d.v

$(n+1)! = (n+1)\, n!$

Exemple: $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

$U_n > 0$.

On a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ c.v.

$\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ « $e^x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ »

(2) $\sum \frac{n^n}{n!}$?

$U_n = \frac{n^n}{n!} \geq 0$.

$a^b = e^{b \ln(a)}$.

$a > 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)}\, n^n}$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim e^{n \times \frac{1}{n}} = e.$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e > 1$.

d'où $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ d.v.

Séries à termes réels de signe quelconque.

Def: On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est A.C si la série

$\sum\limits_{n\geq 0} |U_n|$ c.V.

Th: C.A $\Rightarrow$ C.V.

example: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ c.V car $\sum\limits_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ c.V produit de cauchy :

$\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux serie A.C alors la serie

produit définie par $w_n = u_0 \cdot v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n \cdot v_0$

$= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

est absolument c.v de plus.

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n \right) \times \left(\sum_{n\geq 0} v_n \right)$$

Series alternès :

Def : On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à terme réels est alternée si : $u_n = (-1)^n |u_n|$ où $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$.

Th : (T.S.S.A). $\sum (-1)^n a_n$ ou $a_n \geq 0$

si $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ (a_n) \text{ est decroissante.} \end{cases} \Longrightarrow \sum (-1)^n a_n$ c.v.

dans ce cas : On a :

$$|R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n a_n| \leq a_{n+1}.$$

Exemple : la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$. $\to a_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Si si $\alpha \leq 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 \\ +\infty \end{cases}$ donc $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est d.v.

Si $\alpha > 0$: on a la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est positive et décroissante et

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. d'où $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ c.v.

Conclusion : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ c.v $\Longleftrightarrow \alpha > 0$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ c.v $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ c.V} \iff \alpha > 1.$$

c-à-d $\forall\ 0 < \alpha \leq 1$ on a $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ c.V mais elle ne converge pas absolument.

Series semi-convergentes: une serie $\sum_{n \geq 0} U_n$ est dite semi-convergente si elle convergente sans être absolument convergente.

Regle d'Abel:

Soit $\sum_{n \geq 0} U_n$ une série de terme general s'écrit $U_n = a_n \cdot b_n$. supposons que. $a_n \in \mathbb{R}$; $b_n \in \mathbb{C}$.

(1) $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq M.$

(2) la suite a_n est decroissante.

(3) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$

alors $\sum U_n$ c.V.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}. \quad \boxed{q \neq 1}$$

Exercice: $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$. où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$U_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = a_n \times b_n \text{ où } a_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } b_n = e^{in\theta}.$$

On a: $|U_n| = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ssi $\alpha > 0$.

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta).$

c-à-d si $\alpha \leq 0$ dans ce cas $\sum_{n \geq 1} U_n$ d.V

$e^{i\theta} = \cancel{\cos\theta} + i\sin(\theta)$

$e^{-i\theta} = \cancel{\cos(\theta)} - i\sin(\theta).$

$1 = e^0 = e^x \cdot e^{-x}.$

si $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \cdot \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\theta} \frac{e^{\frac{in\theta}{2}}\left(e^{\frac{in\theta}{2}} - e^{-\frac{in\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \quad \cancel{2}i\sin(\frac{n\theta}{2})$$

$$= e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\cancel{2i}\sin(\frac{n\theta}{2})}{\cancel{2i}\sin(\theta/2)}$$

$$= e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\theta/2)}$$

donc $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)} = M$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\alpha} = 0$ et la suite $\left(\frac{1}{n\alpha}\right)$ est $\searrow$.

donc $\sum \frac{e^{in\theta}}{n\alpha}$ c.V.

$$\frac{e^{in\theta}}{n\alpha} = \frac{\cos(n\theta)}{n\alpha} + i\frac{\sin(n\theta)}{n\alpha}.$$

Conclusion $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n\alpha}$ c.V $\iff \alpha > 0$

En particulier $\begin{cases} \sum \frac{\cos(n\theta)}{n\alpha} \text{ c.V } \forall \alpha > 0 \\ \sum \frac{\sin(n\theta)}{n\alpha} \text{ c.V } \forall \alpha > 0. \end{cases}$

$\boxed{U_n > 0}$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{3/2}}$.

Ex. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{C.V}} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{d.V}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}}_{\text{C.V}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}}_{\text{C.V.}}.$$

d.V

$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ C.V. • $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}$ C.V.

$\sum \frac{-1}{2n}$ D.V. • $\sum_{n\geq 2} \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$

On a $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, donc $\exists n_0$. $|\varepsilon_n| \leq 1$ $\forall n > n_0$.

$0 \leq \left|\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ où $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.V donc $\sum \frac{|\varepsilon_n|}{n^{3/2}}$ C.V c-à-d $\sum \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$ A.C.

donc $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ d.V.

<< r.q : on a : $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

mais les deux séries $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

ne sont pas de même type.

Exercice 7 **ENSAH 2019-2020**

Choisir la bonne réponse.

Question 1

On considère une série réelle $\sum_{n\geq 0} u_n$.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors (u_n) converge vers 0 V
2) Si (u_n) converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
3) Si (u_n) converge vers 0 alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Question 2

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n < \sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. V
3) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Question 3

1) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$
2) converge si et seulement si $x \neq 1$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$
3) converge si et seulement si $|x| < 1$ et sa somme est $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ V

Question 4

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs, (a_n) est une suite positive bornée.

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n a_n$ converge V
2) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n a_n$ diverge
3) On ne peut rien dire

Exercice 2 (4 pts)

Répondez à chaque question par Vrai ou Faux Dans tout ce qui suit, $(u_n)_n$ désigne une suite de nombres réels.

1) Q 1: Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. V
2) Q 2: Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} \frac{1+u_n}{2+u_n}$ F
3) Q 3: Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}(-1)^n u_n$ convergente F
4) Q 4: Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum_{n=1} u_n$ converge alors la série $\sum_{n=1}(-1)^n u_n$ convergente V

Exercice 1

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

1) $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$.
2) $V_n = \sqrt{n^2+n} - n$.
3) $V_n = \frac{n^3}{n!}$.
4) $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.
5) $U_n = \frac{n}{n^2-2}$.
6) $V_n = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
7) $U_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3$.
8) $V_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$.
9) $U_n = (-1)^n e^{-n}$.
10) $V_n = (-1)^n n$.

$\sin(x) \sim$

(1). $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2} \neq 0$ donc $\sum U_n$ d.V.

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

donc $\sum V_n$ d.V

3) 1ère methode : $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n+1}$.

donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ donc $\sum U_n$ C.V.

2ème methode: comme $n^2 V_n = \frac{n^5}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(\alpha = 2 > 1)$

donc $\sum V_n$ C.V.

4) On a: $0 \leq U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ C.V

car $\frac{1}{2} < 1$. donc $\sum U_n$ C.V.

5) On a: $U_n = \frac{n}{n^2-1} \geq 0$ $\forall n \geq 2$ et $U_n \sim \frac{1}{n}$.

comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ d.V alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$ d.V.

6) On a: $\forall n \geq 1$ $\quad 0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ C.V (car $\frac{3}{4} < 1$) alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$ C.V

7) comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < \frac{1}{n} < \pi$ donc

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. et donc $V_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3 \geq 0$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et donc $V_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3 \geq 0$

et de plus $V_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n}\right)^3$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ C.V

alors $\sum_{n \geq 1} V_n$ C.V.

8) On a : $V_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$ car $\left(1 + \frac{1}{n^2} > 1\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

de plus $V_n \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ C.V. d'où

$\sum_{n \geq 1} U_n$ C.V

9) On a : $|U_n| = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Comme $\frac{1}{e} < 1$ alors

$\sum_{n \geq 0} |U_n|$ C.V d'où $\sum_{n \geq 0} U_n$ C.V

10) Comme $V_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$ alors $\sum U_n$ d.V.

« si $|q| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $\left(\sum_{n=r}^{+\infty} q^n = \frac{q^r}{1-q}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. »

$\boxed{U_{n+1}} - \cancel{U_n}$

$\cancel{U_n} - \cancel{U_{n-1}}$

$\vdots$

$\cancel{U_1} - \boxed{U_0}$

Par utilisation du théorème sur les séries télescopiques.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, $\sum_{n=0}^{N} U_{n+1} - U_n = U_{N+1} - U_0$.

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{n+1} - U_n$ C.V $\Longleftrightarrow$ (U_n) converge.

et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{n+1} - U_n = \ell - U_0$ où $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exemple : $\sum^{+\infty} \frac{1}{\ldots}$ C.V. $\ldots$

$n=0$

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ C.V. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ donc } S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exercice 2 **ENSATE**

Étudier la nature et calculer la somme dans le cas de convergence des séries de termes généraux:

1) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2) $v_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$.
3) $w_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$.
4) $t_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

1) On a : $U_n > 0$ et $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ d.v.

alors $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ d.v.

2) On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = 2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6.$$

donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ C.V. et de plus.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 6.$$

3) On a : $W_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right)$.

$$= \ln\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) = \ln((n-1)(n+2)) - \ln(n(n+1)).$$

$$= \ln(n-1) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln(n+1).$$

$$= \left[\ln(n-1) - \ln(n)\right] + \left[\ln(n+2) - \ln(n+1)\right].$$

donc $S_n = \sum_{k=2}^{n} W_n = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+2) - \ln(3)$.

$$= \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln(3) \longrightarrow -\ln(3).$$

$$\sum_{k=2}$$

$$= \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln(3) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(3).$$

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} w_n$ C.V et $\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = -\ln(3)$.

4) En utilisant la formule.

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

pour $x=-n$ et $y=n+1$ on a :

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = t_n.$$

donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} t_n = \arctan(n+1) - \arctan(0)$

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi/2.$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n$ C.V et $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \pi/2$

Exercice 3

1) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{(n+1)!}$ et calculer sa somme.

2) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{((n+1)^2)}{(n(n+2))}\right)$ et déterminer sa somme.

Exercice 4 Nature de séries dépendant d'un paramètre via comparaison intégrale

1) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

2) Montrer que $\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq \sum^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$, et déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice 6 C FINAL ENSATE 2018

Considérons la série de terme général u_n où

$$u_n = \frac{n^\beta}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

1) Étudier les cas $a > 1$ et $a = 1$ via la règle de d'Alembert.
2) Étudions a présent le cas $a < 1$.
   a) Montrer que $\sum \ln(1 + a^n)$ converge.
   b) Montrer qu'il existe un réel k tel que $u_n \sim_\infty kn^\beta$.
   c) En déduire la nature de $\sum u_n$.