2

Calcul des primitives et des intégrales définies

De nombreux problèmes, d'origine purement mathématique ou d'origine physique, exigent une ou plusieurs intégrations ; on entend par là aussi bien le calcul d'une primitive d'une fonction, par exemple en vue de résoudre une équation différentielle, que celui de l'intégrale de Riemann d'une fonction, qu'on appelle aussi intégrale définie. Ce dernier problème se ramène au calcul d'une primitive, sauf dans certains cas exceptionnels où on peut s'en passer.

Aussi nous étudierons tout d'abord les méthodes générales de calcul des primitives, avec dans certains cas leur adaptation aux intégrales définies. Nous aborderons ensuite succinctement les méthodes de calcul approché des intégrales définies, permettant l'utilisation de calculatrices, programmables ou non.

A. PRINCIPES GÉNÉRAUX

2.1. PRIMITIVES USUELLES IMMÉDIATES

Nous entendons par là celles qui résultent, sans calcul, de la lecture du tableau des dérivées usuelles. On obtient ainsi, en appelant F une primitive de f sur un intervalle I (la primitive la plus générale étant alors $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante arbitraire), le tableau suivant.

$f(x) =$	$F(x) =$	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
x^n, n entier naturel	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier relatif $\neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
x^α, α réel $\neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$

$f(x) =$	$F(x) =$	Domaine de validité
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$	$x \neq k\pi$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x (a positif $\neq 1$)	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{th}^2 x} - 1$	$-\frac{1}{\operatorname{th} x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$]-1, +1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1, +1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Argsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x = \ln (x + \sqrt{x^2-1})$	$]1, +\infty[$

2.2. INTÉGRATION PAR DÉCOMPOSITION EN SOMME (LINÉARISATION)

En utilisant $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx$, où λ et μ sont des constantes (paragr. 1 chap. 12, tome 1), on peut déjà calculer d'assez nombreuses primitives.

Exemples

a) $\int \tan^2 x\, dx = \int (\tan^2 x + 1)\, dx - \int dx = \tan x - x + C \quad C \in \mathbb{R}$

b) $\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

c) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 (x^2 - 1)\, dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

Ce procédé sera systématique pour certaines formes de fonctions.

$(x^2-1)(x^2+1)$

$x^4 =$

2.3. INTÉGRATION PAR PARTIES

u et v étant deux fonctions de classe C^1 sur un même intervalle I, on sait que $(uv)' = u'v + uv'$.

On en déduit la formule dite d'« intégration par parties » :

$$\boxed{\int u(x) v'(x)\, dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x)\, dx}$$

ou, pour une intégrale définie :

$$\boxed{\int_a^b u(x) v'(x)\, dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x)\, dx}$$

Dans la pratique, ceci permet de calculer, ou de simplifier, certaines intégrales $\int f(x)\, dx$ où f est le produit d'une fonction u et d'une fonction w facile à intégrer ($w = v'$).

Exemple. Calculons : $A = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln (x^2 + 1)\, dx$.

Posons : $u(x) = \ln (x^2 + 1)$ et $v'(x) = x^2$

d'où : $u'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$

et : $A = \left[\frac{x^3}{3} \ln (x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1}\, dx$

$$= \sqrt{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \sqrt{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{Arctan} x\right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \left(\sqrt{3} \ln 2 - \frac{\pi}{9}\right)$$

■ Principaux cas d'emploi de l'intégration par parties

a) Formule de Taylor avec reste intégral (voir exercice 2.21).

b) $\int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx$, où P est un polynôme, α un réel donné non nul.

En posant $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = e^{\alpha x}$ on est ramené à $\int P'(x)\, e^{\alpha x}\, dx$, qui est de la même forme mais avec un polynôme de degré inférieur à celui de P ; en réitérant l'opération s'il y a lieu, on arrive ainsi de proche en proche à :

$$\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

Le même procédé s'applique à :

$\int P(x) \cos \alpha x\, dx$, $\int P(x) \sin \alpha x\, dx$, $\int P(x) \operatorname{ch} \alpha x\, dx$, $\int P(x) \operatorname{sh} \alpha x\, dx$

Exemple

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = [x^2 \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin x\, dx = [2x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \cos x\, dx$$

$$= -2\pi$$

c) $\int f(x)\, g(x)\, dx$, où g est une fonction rationnelle (ou parfois seulement algébrique) et f une fonction transcendante* de dérivée algébrique.

* On appelle ainsi une fonction f non algébrique, c'est-à-dire ne se déduisant pas de x par des opérations algébriques (exemples fonctions ln, Arctan, sin...)

En posant $u = f$ et $v' = g$, on arrive à une intégrale plus simple, sauf si v est une fonction transcendante.

Exemples. On vérifiera facilement par ce procédé que :

$$\int x \operatorname{Arctan} x\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{Arctan} x - \frac{x}{2} + C$$

mais que le calcul de $\int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\, dx$ par le même procédé conduit à un « cercle vicieux ».

2.4. CHANGEMENT DE VARIABLE BIJECTIF DANS UNE INTÉGRALE

2.4.1. Cas d'une intégrale indéfinie

a) Principe

On sait que $F(x) = \int f(x)\, dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Si $t \mapsto \varphi(t) = x$ définit une bijection d'un intervalle J vers l'intervalle I sur lequel f est définie, la fonction réciproque de φ étant $x \mapsto \psi(x) = t$, on sait que :

$$[F(\varphi(t))]' = F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)$$

donc : $F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \Phi(t)$

Si cette dernière intégrale peut être calculée, sa valeur $\Phi(t)$ fournit :

$$F(x) = \Phi\, [\psi(x)]$$

b) Pratiquement

Deux cas peuvent se présenter :

- On introduit directement $\psi(x)$, φ n'intervient alors pas.

Exemple

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x}\, dx = \operatorname{Arctan} (\sin x) + C$$

- On introduit d'abord $\varphi(t)$, pour simplifier f.

Exemple

$$F(x) = \int x^2 \sqrt{x^2+1}\, dx$$

Le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$, bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, permet d'éliminer le radical, on obtient ainsi :

$$\Phi(t) = \int \operatorname{sh}^2 t \cdot \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \cdot \operatorname{ch} t\, dt = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2t\, dt = \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t - 1)\, dt$$

Exemple. Soit à calculer : $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

On écrit : $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x (\sin x)'}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 x}}\, dx$

D'où l'idée du changement de variable $\sin x = t$, bijectif sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Les bornes radical, on obtient ainsi :

$$\Phi(t) = \int \mathrm{sh}^2 t \cdot \sqrt{\mathrm{sh}^2 t + 1} \cdot \mathrm{ch}\, t \,\mathrm{d}t = \int \mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}^2 t \,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int (\mathrm{ch}\, 4t - 1)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{32}\mathrm{sh}\, 4t - \frac{1}{8}t + C$$
$$= \frac{1}{16}\mathrm{sh}\, 2t\, \mathrm{ch}\, 2t - \frac{1}{8}t + C$$
$$= \frac{1}{8}\mathrm{sh}\, t\, \mathrm{ch}\, t(2\,\mathrm{sh}^2 t + 1) - \frac{1}{8}t + C$$

Or $\mathrm{sh}\, t = x$, $\mathrm{ch}\, t = \sqrt{x^2+1}$ et $t = \mathrm{Argsh}\, x$, il vient donc :

$$F(x) = \frac{1}{8}[x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \mathrm{Argsh}\, x] + C$$

2.4.2. Cas d'une intégrale définie

La même méthode s'applique au départ. Soit avec les mêmes notations :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

si nous posons $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$, donc :

$$I = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

soit : $$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

avec $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

On voit qu'il est inutile d'envisager le retour à la variable x ; le changement de variable dans une intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc à répercuter en trois points : dans la fonction f, dans la différentielle $\mathrm{d}x$, dans les bornes. On est ainsi amené à une intégrale suivant la variable t dans laquelle il est possible d'effectuer d'autres changements de variables successifs, toujours sans retour en arrière.

On écrit : $$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x(\sin x)'}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$$

D'où l'idée du changement de variable $\sin x = t$, bijectif sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Les bornes deviennent $t_1 = \sin 0 = 0$, $t_2 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc :

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}}$$

On peut éliminer le radical en posant $t\sqrt{2} = \sin u$, $u = \mathrm{Arcsin}\,(t\sqrt{2})$, les bornes deviennent $u_1 = \mathrm{Arcsin}\, 0 = 0$, $u_2 = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 u\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,\mathrm{d}u}{\cos u} \quad (\text{car } \cos u > 0)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sin^2 u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2 - \frac{1-\cos 2u}{2}\right)\mathrm{d}u$$

soit enfin : $$A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{32}(3\pi + 2)$$

Il faut évidemment s'assurer, avant un calcul d'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, que les bornes d'intégration sont compatibles avec la fonction f, autrement dit que $[a, b]$ est inclus dans un intervalle sur lequel f est définie et intégrable : ainsi, par exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$ n'a pas de sens.

Notons que dans l'immédiat, il n'est pas question d'imaginer sans indication les changements de variables adaptés à une intégrale donnée, mais seulement de savoir les mettre en œuvre. Les paragraphes suivants (C, D et E) seront, en fait, l'adaptation technique à diverses formes classiques d'intégrales des trois grands principes vus dans celui-ci : linéarisation, intégration par parties, changement de variable ; le but étant de ramener le calcul à des intégrales usuelles, celles vues plus haut ou quelques autres qui feront l'objet d'un second tableau.

2.4.3. Quelques applications immédiates du changement de variable

a) Si $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

b) Si f est une fonction impaire

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

Dans I_1, posons $x = -t$, on obtient, puisque $f(-t) = -f(t)$:

$$I_1 = \int_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -I_2$$

donc : $$\boxed{f \textbf{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

ce qui est d'ailleurs évident graphiquement (Fig. 2-1).

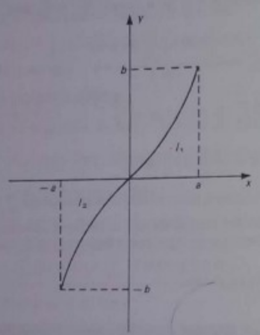


Figure 2-1

On démontrerait de même que :

$$\boxed{f \textbf{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}$$

c) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et de période T, alors par le changement de variable $x - T = t$, on a, pour tout a et tout b réels :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{f\ T\text{-périodique} \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R},\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

on a alors, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{f\ T\text{-périodique} \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

d) Il est évident que si u ne s'annule pas :

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C}$$

2.5. SECOND TABLEAU DE PRIMITIVES USUELLES

Ces primitives s'obtiennent par des calculs très simples dont nous laissons le soin au lecteur, et pourront être utilisées sans démonstration dans les calculs d'intégrales, au même titre que celles du premier tableau. C'est ainsi que nous envisagerons ensuite des méthodes générales de calcul d'intégrales appartenant à des types classiques. Notons dès à présent que si on sait dériver à peu près n'importe quelle fonction, on ne sait en général pas l'intégrer. De nombreuses fonctions élémentaires n'ont pas de primitives élémentaires, telles les fonctions f définies par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \in \mathbb{R}^*)$ ou $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ $(x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\})$ ou $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Cependant une étude satisfaisante d'une primitive de f, non calculable explicitement, peut souvent être effectuée en l'écrivant $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est ce qui a été fait quand on a posé :

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0)$$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx. \quad u = -x.$$
$$= \quad '' \quad + \int_a^0 f(-u) - du.$$
$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$
$$= 2\int^a f(x)\,dx.$$

$$= 2 \int_0^a f(x)\,dx.$$

- $\int 1 \cdot \ln(x)\,dx \overset{?}{=}$

$$u(x) = \ln(x) \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}.$$
$$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x.$$

$x e^x$ ↪

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx.$$
$$= x(\ln(x) - 1) + C.$$

$$\int x e^x = x e^x - e^x$$

32 | 2 Calcul des primitives et des intégrales définies

$f(x) =$	$F(x) =$	Domaine de validité
$\ln\lvert x\rvert$	$x \ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}^*$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{th} x}$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{th}\frac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$x \neq \pm a$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$	$\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a}$	$]-a, +a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ $(k \neq 0)$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert$	$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R},\ \text{si } k>0\\ \lvert x\rvert > \sqrt{-k},\\ \text{si } k<0\end{array}\right\}$

Rappelons la relation $\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C$, $a \neq 0$, très utile notamment pour calculer les quatre dernières primitives du tableau.

Pratique de la décomposition en éléments simples | 33

B. PRIMITIVES DES FRACTIONS RATIONNELLES

■ Principe

Sauf cas particuliers évidents, comme par exemple :

$$\int \frac{5x^4+2x}{x^5+x^2-1}\,dx = \ln\lvert x^5+x^2-1\rvert + C$$

le calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle exige la décomposition de cette fraction en partie entière et éléments simples sur $\mathbb{R}$, donc de première espèce exclusivement si les pôles sont tous réels, de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ $(a \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}^*)$; les éléments simples de seconde espèce, de la forme $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}$, $(p, q$ réels, $p^2-4q<0$, $\beta \in \mathbb{N}^*)$ apparaissant lorsqu'il y a des pôles complexes.

On voit que l'intégration d'une fraction rationnelle, pourvu que l'on sache factoriser son dénominateur, se ramène à celles :
- d'un polynôme (immédiate);
- d'éléments simples de première espèce;
- d'éléments simples de seconde espèce.

Nous allons étudier les types d'intégrales ainsi introduits, mais auparavant indiquer quelques méthodes pratiques de décomposition.

2.1. PRATIQUE DE LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Il existe d'assez nombreuses méthodes de calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction rationnelle, que nous supposerons sans partie entière.

$$f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{avec} \quad d^\circ[Q(x)] > d^\circ[R(x)]$$

La plus générale, mais souvent longue, consiste à réduire au même dénominateur la décomposition formelle écrite avec des coefficients indéterminés, le dénominateur commun est $Q(x)$, et l'identification du numérateur à $R(x)$ fournit n équations du premier degré à n inconnues, qui admettent une solution unique. Notons à ce propos que le nombre n de coefficients inconnus est égal au degré du dénominateur $Q(x)$.

En dehors de l'identification, pratiquement déconseillée, on peut, dans les cas couramment rencontrés, retenir les procédés suivants.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{a \cdot 1/a}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\,dx. \qquad \frac{f'}{1+f^2(x)}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1/2a}{x-a} - \frac{1/2a}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\ln(\lvert x-a\rvert) - \ln(x+a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert\right) + C.$$

2.1.1. Pour obtenir la « partie polaire » relative à un **pôle réel simple** a ($\alpha = 1$), c'est-à-dire $\frac{A}{x-a}$, on écrit :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a)Q_1(x)} \quad \text{avec} \quad Q_1(a) \neq 0$$

et :

$$\frac{R(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \varphi(x)$$

où la fraction φ n'a pas de pôle égal à a. En multipliant les deux membres par $x-a$ et faisant tendre x vers a, on obtient :

$$\boxed{A = \frac{R(a)}{Q_1(a)} = \lim_{x \to a} [(x-a)f(x)]}$$

On peut aussi observer que $Q_1(a) = \lim_{x \to a} \frac{Q(x)-Q(a)}{x-a} = Q'(a)$, donc on a aussi :

$$\boxed{A = \frac{R(a)}{Q'(a)}}$$

(appelé résidu de la fraction $\frac{R(x)}{Q(x)}$ au pôle a).

2.1.2. Pour obtenir le terme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ de la partie polaire de $f(x)$ relative au pôle réel multiple d'ordre α, on peut de même écrire :

$$\boxed{A = \lim_{x \to a} [(x-a)^\alpha f(x)]}$$

2.1.3. Pour obtenir la partie polaire $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ relative au facteur x^2+px+q figurant au premier degré dans $Q(x)$, on peut utiliser les racines complexes conjuguées du polynôme x^2+px+q, et, a étant une de ces racines, écrire :

$$\boxed{Ba + C = \lim_{x \to a} [(x^2+px+q)f(x)]}$$

(voir exemples plus loin).

2.1.4. Pour obtenir le terme $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}$ relatif au facteur x^2+px+q figurant au degré β dans $Q(x)$, on peut de même écrire (notations du c)) :

$$\boxed{Ba + C = \lim_{x \to a} [(x^2+px+q)^\beta f(x)]}$$

2.1.5. Pour obtenir éventuellement les coefficients manquant encore, on utilise d'autres valeurs numériques finies, notamment $x = 0$, et souvent aussi $\lim_{x \to \infty} [xf(x)]$.

2.1.6. On peut aussi, dans le cas d'un pôle réel d'ordre élevé, utiliser une division suivant les puissances croissantes de $x - a = t$.

2.1.7. Enfin il est conseillé de tenir compte dans l'écriture de la décomposition, du fait, éventuel, que la fonction f est paire ou impaire (voir exemple $\frac{1}{x^4+1}$).

2.2. INTÉGRATION D'UN ÉLÉMENT SIMPLE DE PREMIÈRE ESPÈCE

Il s'agit de calculer $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$, α entier $\geqslant 1$.

Deux cas se présentent :

$$\alpha = 1, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\alpha \geqslant 2, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \int (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{-1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C & \text{si } \alpha \geqslant 2 \end{cases}}$$

$8^{\alpha} \longrightarrow$

Il en résulte, d'après **a)** ci-dessus, qu'une primitive d'une fraction rationnelle sans partie entière ne possédant que des pôles réels simples (c'est-à-dire d'ordre 1) est une somme de logarithmes, qui peut d'ailleurs se ramener à un seul logarithme (ce qui est intéressant lorsque les coefficients sont rationnels).

Exemple. Soit à calculer : $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

Les pôles sont $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{x}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad \text{avec} \quad a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

On obtient : $A = \lim_{x \to a} \frac{x(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{a-b} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

de même : $B = \frac{b}{b-a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

On peut aussi obtenir ces coefficients par la formule :

$$A = \frac{R(a)}{Q'(a)} = \frac{a}{2a+1}$$

On a donc :

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \ln\left|x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \ln\left|x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| + C$$

2.3. INTÉGRATION D'UN ÉLÉMENT SIMPLE DE SECONDE ESPÈCE

Il s'agit de calculer :

$$F(x) = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \text{ entier} \geqslant 1, \quad p^2-4q<0$$

Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes.

Première étape. On fait apparaître dans $Ax+B$ la dérivée de x^2+px+q, en écrivant :

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{pA}{2}$$

on obtient ainsi en posant $x^2+px+q = u$, et $B - \frac{pA}{2} = \lambda$:

$$F(x) = \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^\alpha}$$

$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$ est l'intégrale d'un élément simple de première espèce, et il reste à calculer $G(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^\alpha}$.

Deuxième étape. On décompose x^2+px+q en somme de deux carrés :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2+k^2$$

où : $\quad t = x + \frac{p}{2}, \quad$ et $\quad k = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} > 0 \quad \left(\text{car } q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$

d'où : $\quad G(x) = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+k^2)^\alpha} = \varphi(t)$

Troisième étape. Calcul de $\varphi(t)$:

Si $\alpha = 1$, $\varphi(t) = \frac{1}{k}\operatorname{Arctan}\frac{t}{k}$.

Si $\alpha \geqslant 2$, on pose $t = k\tan\theta$, $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{k}$, on obtient :

$$\varphi(t) = k^{1-2\alpha}\int \frac{(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^\alpha} = k^{1-2\alpha}\int \cos^{2\alpha-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

que l'on calcule par linéarisation et éventuellement changement de variable.

On revient à la variable t et on obtient pour $\varphi(t)$ une combinaison d'une fraction rationnelle et d'un arc tangente.

Quatrième étape. On revient à x dans $\varphi(t)$, on obtient $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.

Exemple. Calculons : $F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$.

Faisons d'abord apparaître $2x-2$, dérivée de x^2-2x+3, au numérateur :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4}{(x^2-2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+3)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$= H(x) + G(x) + C$$

$H(x)$ est de la forme $\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{2u}$, donc :

$$H(x) = -\frac{1}{2(x^2-2x+3)}$$

Dans $G(x)$, nous écrivons :

$$x^2-2x+3 = (x-1)^2+(\sqrt{2})^2 = t^2+(\sqrt{2})^2, \quad \text{avec} \quad x-1 = t$$

puis $t = \sqrt{2}\tan\theta$:

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}} = \operatorname{Arctan}\frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

Il en résulte :

$$G(x) = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)^2} = 2\int\frac{\sqrt{2}(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{4(1+\tan^2\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\int(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\theta+\frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta$$

Or si :

$$\tan\theta = v = \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{2v}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}(x-1)}{1+\frac{(x-1)^2}{2}} = \frac{2\sqrt{2}(x-1)}{x^2-2x+3}$$

Donc : $$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Arctan}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-2x+3}$$

En regroupant avec $H(x)$ et tenant compte d'une constante d'intégration (dont on peut se dispenser dans les calculs partiels), on obtient :

$$F(x) = \frac{x-2}{2(x^2-2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Arctan}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$$

On voit, en coordonnant les résultats des paragraphes 2 et 3, que l'intégration d'une fraction rationnelle conduit, dans le cas le plus général, à la somme d'une fraction rationnelle et d'un ou plusieurs logarithmes ou arcs tangentes de fractions rationnelles.

2.4. EXEMPLES D'INTÉGRATION DE FRACTIONS RATIONNELLES

2.4.1. $F(x) = \int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+3x^2+7x+5} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$

Le pôle $x = -1$ est apparent, donc :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

On peut calculer A, B, C soit par identification, soit, plus rapidement, comme suit :

$$\lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = A = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}xf(x) = 0 = A+B, \quad \text{d'où} \quad B = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 = A+\frac{C}{5}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{5}{4}$$

On a donc :

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\int\frac{x+5}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}G(x)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2+8}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+4\int\frac{(x+1)'}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{2}$$

Après regroupement on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{2}+C, \quad C\in\mathbb{R}$$

2.4.2. $F(x) = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

Ici nous n'avons pas de pôle réel, on factorise x^4+1, sur $\mathbb{R}$, en écrivant :

$$x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

D'où : $$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

On observe que f est paire :

$$f(-x) = \frac{-Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{-Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1} = f(x)$$

et comme la décomposition est unique, on a $C = -A$ et $D = B$.

La substitution $x = 0$ donne :

$$1 = B+D = 2B, \quad \text{d'où} \quad B = D = \frac{1}{2}$$

$x = \sqrt{2}$ donne :

$$\frac{1}{5} = \frac{A\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{5}+\left(-A\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi : $$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}[g(x)-h(x)]+\lambda$$

avec : $$g(x) = \frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}+1)$$

$$h(x) = \int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x = g(-x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}-1)$$

On obtient donc :

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}[\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}-1)]+\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

2.4.3. $F(x) = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}.$

La décomposition en éléments simples est analogue à la précédente, mais avec 8 coefficients, se ramenant à 4 en tenant compte de la parité, leur calcul, et celui des intégrales correspondantes, serait long. Il est plus simple d'utiliser une intégration par parties en écrivant :

$$F(x) = \int\frac{x^4+1-x^4}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}-\int x\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$$

compte tenu du calcul du paragraphe *b)*, il suffit de calculer :

$$\frac{1}{4}\int x\frac{4x^3\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{x}{x^4+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

$\left(\text{en posant } u(x) = x \text{ et } v'(x) = \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\right).$

Il en résulte :

$F(x) = \frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$, la dernière intégrale ayant fait l'objet de l'exemple 2.4.2 précédent.

Cette méthode, classique, permet de ramener à $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$ une intégrale de la forme $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^n+1)^p}$, où n et p sont des entiers positifs.

2.4.4. $I = \int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^3(x^2+1)}.$

La décomposition fait apparaître 5 coefficients indéterminés. Nous les obtiendrons ici à l'aide d'une division suivant les puissances croissantes de la variable auxiliaire $x+1 = t$. La fraction devient :

$$\varphi(t) = \frac{t-1}{t^3(t^2-2t+2)}$$

En divisant $-1+t$ par $2-2t+t^2$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 2, on obtient :

$$-1+t = (2-2t+t^2)\left(-\frac{1}{2}+\frac{t^2}{4}\right)+\frac{t^3}{2}-\frac{t^4}{4}.$$

D'où : $$\varphi(t) = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{t^2}{4}}{t^3}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{t}{4}}{t^2-2t+2} = -\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{4t}-\frac{1}{4}\frac{t-2}{t^2-2t+2}$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1}$$

C'est bien la décomposition en éléments simples cherchée.

L'intégration est alors immédiate et donne :

$$I = \left[\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{Arctan}x\right]_0^1$$

Soit : $$I = \frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}$$

dont une valeur approchée est :

$$I \simeq 0{,}095$$

■ Conclusion

Comme le montrent la théorie et les exemples précédents, qui n'ont pas l'ambition d'être exhaustifs quant aux méthodes pratiques de décomposition et d'intégration, l'intégration des fractions rationnelles demande une grande habitude si l'on veut éviter des calculs longs et fastidieux, voire inextricables. On aura intérêt, avant de se lancer dans l'application d'une méthode générale, à examiner avec soin si l'on se trouve dans un cas particulier : possibilité d'abaisser le degré par changement de variable ou intégration par parties, simplification du calcul des coefficients par des considérations de parité, etc.

Malgré ces difficultés pratiques, cette intégration présente un intérêt considérable du fait que de nombreuses intégrales, dont nous allons examiner quel- … transformations simples, le plus

puis si nécessaire on recommence avec $\sin^2 2x$ et $\cos^2 2x$, ou on change de variable (exemples déjà vus).

2.1.4. p et q pairs, l'un au moins étant négatif : on prend pour variable $\tan x = t$; cette méthode est d'ailleurs aussi applicable lorsque p et q sont impairs.

Exemples

- $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x$

$$= \int\frac{1-u^2}{u^4}\,\mathrm{d}u \quad (\text{avec } \sin x = u)$$

examiner avec soin si l'on se trouve dans un cas particulier ... d'abaisser le degré par changement de variable ou intégration par parties, simplification du calcul des coefficients par des considérations de parité, etc.

Malgré ces difficultés pratiques, cette intégration présente un intérêt considérable du fait que de nombreuses intégrales, dont nous allons examiner quelques types classiques, se ramènent par des transformations simples, le plus souvent des changements de variables, à celles de fractions rationnelles.

C. PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES OU HYPERBOLIQUES

Nous envisageons ici des intégrales de la forme $\int R(\sin x, \ \cos x)\,\mathrm{d}x$, ou $\int R(\operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x$, où R est une fraction rationnelle.

2.1. FORME $\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x$, OU $\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\,\mathrm{d}x$, AVEC p ET q ENTIERS RELATIFS

À des nuances de signes près, les méthodes sont les mêmes pour ces deux formes d'intégrales, nous étudierons la première.

2.1.1. *q impair* : on prend pour variable $\sin x = u$, en écrivant :

$$F(x) = \int \sin^p x \ \cos^{q-1} x \ \cos x\,\mathrm{d}x = \varepsilon \int u^p (1-u^2)^{\frac{q-1}{2}}\,\mathrm{d}u$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $\cos x > 0$ ou $\cos x < 0$.

2.1.2. *p impair* : même principe, avec la variable $\cos x = u$.

2.1.3. *p* et *q* pairs $\geqslant 0$: on abaisse le degré en utilisant les formules :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Exemples

- $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-u^2}{u^4}\,\mathrm{d}u$ (avec $\sin x = u$)
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^4 x} = \int \frac{(\operatorname{th} x)'}{\operatorname{sh}^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{t^2}-1\right)^2 \mathrm{d}t$, (avec $\operatorname{th} x = t$)
$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C$$
$$= -\frac{1}{3\operatorname{th}^3 x} + \frac{2}{\operatorname{th} x} + \operatorname{th} x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2.2. INTÉGRALES DE WALLIS

On appelle ainsi les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, où n est entier naturel. On a visiblement $I_n > 0$ et $J_n > 0$.

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ montre aisément que $I_n = J_n$.

On calcule immédiatement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.

Pour n entier $\geqslant 2$, transformons I_n par une intégration par parties :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,\mathrm{d}x$$

La partie intégrée est nulle, il reste :

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

d'où la relation de récurrence :

$$\boxed{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

qui permet de ramener le calcul de I_n à I_0 si n est pair, à I_1 si n est impair. Plus précisément distinguons ces deux cas :

2.2.1. ***n* pair** : $n = 2p$, p entier.

On écrit :
$$2I_2 = I_0$$
$$4I_4 = 3I_2$$
$$6I_6 = 5I_4$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(2p-2)I_{2p-2} = (2p-3)I_{2p-4}$$
$$2pI_{2p} = (2p-1)I_{2p-2}$$

Par multiplication membre à membre, on obtient après simplification :

$$2\cdot 4\cdot 6\dots(2p)I_{2p} = 1\cdot 3\cdot 5\dots(2p-1)I_0$$

Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$I_{2p} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2p)}\,\frac{\pi}{2}$$

2.2.2. ***n* impair** : $n = 2p+1$, p entier.

La même méthode donne :

$$I_{2p+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2p)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2p-1)(2p+1)}$$

Nous aurons donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}}$$

Les relations immédiates $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1$ montrent que $I_{2n} - I_{2n+1}$ quand $n \to +\infty$, et permettent d'établir la formule de Wallis :

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}\right]^2$$

ou encore :

$$\boxed{\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}}$$

La première des intégrales de Wallis est souvent utile dans des calculs d'intégrales multiples d'origine physique, moments d'inertie par exemple.

2.3. CAS GÉNÉRAL

Soit à calculer :

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x.$$

a) On essaie l'un des changements de variable $\sin x = u$, $\cos x = u$, $\tan x = u$ (ou $\operatorname{sh} x = u$...), à retenir s'ils n'introduisent pas de radicaux.

b) En cas d'échec, la méthode générale consiste à prendre pour variable $\tan\frac{x}{2} = t$ pour les fonctions trigonométriques, $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t$ ou $\mathrm{e}^x = u$ pour les fonctions hyperboliques. On est ainsi ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle. Notons que $\int R(\sin x)\,\mathrm{d}x$ se ramène, par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$, à $-\int R(\cos y)\,\mathrm{d}y$, plus commode (exemple ci-après).

Exemples

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{(2+\cos y)^2}$

cos
sin
dt.
$\int F(t)\,\mathrm{d}t.$

$\tan\frac{y}{2} = t$ donne $y = 2\operatorname{Arctan} t$ et $\mathrm{d}y = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Comme $\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ on voit que l'on aura une fonction paire de t, alors que $\tan\frac{x}{2} = u$ dans la forme initiale aurait donné une fonction ni paire, ni impaire.

On aura donc :

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{(3+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Plutôt que de décomposer en éléments simples, ce qui donnerait :

$$\frac{A}{3+t^2} + \frac{B}{(3+t^2)^2}$$

posons directement :

$$t = \sqrt{3}\tan\theta, \qquad \theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{3}}$$

on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2(1-3\tan^2\theta)\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{9(1+\tan^2\theta)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta - 3 + 3\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\left[\sin 2\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$, N entier $\geqslant 2$; A, B, A, B, réels

Ici, nous poserons $\mathrm{e}^x = u$, d'où $x = \ln u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, et on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)^2}{u^2(u^2+2u-1)}\,\mathrm{d}u$$

Là encore nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

D. PRIMITIVES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES NON RATIONNELLES

Nous envisageons ici une intégrale de la forme :

$$F(x) = \int f[x, y(x)]\,\mathrm{d}x$$

où f est une fonction rationnelle de x et y, et où y est un radical d'une fonction rationnelle de x.

Sauf cas particuliers (par exemple $\int \sqrt{x^3+1}\,x^2\,\mathrm{d}x$), le calcul ne se ramène aux fonctions élémentaires que dans les cas suivants.

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta - 3 + 3\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\,[\sin 2\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

soit :
$$I = \frac{1}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}$$

b) $F(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

La variable $\tan\frac{x}{2} = t$ conduirait ici à de très longs calculs, mais on peut remarquer que :

$$F(x) = \int \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

d'où, en posant $\tan x = u$, $\quad (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$:

$$F(x) = \int \frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{1+u^2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4+u^2+1} = \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(u^2+u+1)(u^2-u+1)}$$

intégrale dont le lecteur achèvera facilement le calcul.

c) $F(x) = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{1+\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x.$

Sauf cas particuliers (par exemple $\int \sqrt{x^3+1}\,x^2\,\mathrm{d}x$), le calcul ne se ramène aux fonctions élémentaires que dans les cas suivants.

2.1. $y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$, n entier $\geqslant 2$; a, b, α, β réels

On prend y pour variable, en effet x et par suite $\mathrm{d}x$ s'expriment rationnellement à l'aide de y et $\mathrm{d}y$, et l'on est ramené à une intégration de fraction rationnelle.

Exemple. $\quad F(x) = \int x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$

On pose :

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = y, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{y^3+1}{y^3-1} = 1 + \frac{2}{y^3-1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{6y^2\,\mathrm{d}y}{(y^3-1)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{6y^3(1+y^3)}{(1-y^3)^3}\,\mathrm{d}y = 6\int \frac{y^3(y^3-1+2)}{(1-y^3)^3}\,\mathrm{d}y$$

$$= 12\int \frac{y^3\,\mathrm{d}y}{(1-y^3)^3} - 6\int \frac{y^3\,\mathrm{d}y}{(1-y^3)^2}$$

dont on pourra achever le calcul en exprimant ces intégrales, après intégration par parties, à l'aide de $\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^3}$ dont le calcul est simple.

2.2. $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $\quad a \neq 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac \neq 0$

Ce cas est beaucoup plus fréquent, et d'ailleurs la forme du paragraphe précédent s'y ramène lorsque $n = 2$ en écrivant :

$$\sqrt{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(\alpha x+\beta)}}{|\alpha x+\beta|}$$

Nous mettrons le trinôme sous la forme dite « canonique » :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

En posant, suivant le signe de Δ, $\pm\frac{\Delta}{4a^2} = k^2, k > 0$ et $x + \frac{b}{2a} = ku$, on se trouve ramené, suivant les signes de a et de Δ, à l'une des trois formes réduites suivantes :

- $a > 0$, $\Delta < 0$, $y = \sqrt{a}\,|k|\,\sqrt{u^2+1}$
- $a < 0$, $\Delta > 0$, $y = \sqrt{-a}\,|k|\,\sqrt{1-u^2}$
- $a > 0$, $\Delta > 0$, $y = \sqrt{a}\,|k|\,\sqrt{u^2-1}$

Notons que le cas $a < 0$, $\Delta < 0$ ne se présente pas car alors y n'est jamais défini.

Autrement dit on est ramené à :

$$\int g[u, \varphi(u)]\,\mathrm{d}u$$

où g est rationnelle et où $\varphi(u) = \sqrt{1+u^2}$, ou $\sqrt{1-u^2}$, ou $\sqrt{u^2-1}$.

Or, sur des exemples, nous avons déjà vu comment éliminer de tels radicaux :

- si $\varphi(u) = \sqrt{1+u^2}$, on pose $u = \operatorname{sh} t$ (parfois $u = \tan\theta$),
- si $\varphi(u) = \sqrt{1-u^2}$, on pose $u = \sin t$, $t = \operatorname{Arcsin} u$ (ou $u = \cos\varphi$, ou $u = \operatorname{th}\theta$),
- si $\varphi(u) = \sqrt{u^2-1}$, on pose $u = \varepsilon \operatorname{ch} t$, avec $\varepsilon = \pm 1$, du signe de u $\left(\text{ou } u = \frac{1}{\cos\theta}, \text{ ou } u = \frac{1}{\operatorname{th}\varphi}\right)$.

Dans chaque cas on arrive à $\int R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\,\mathrm{d}t$, R étant rationnelle.

Exemples

a) $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Comme $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$, nous poserons :

$$x + 1 = 2u$$

d'où :
$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}u}{(2u-1)\sqrt{u^2+1}}$$

puis $u = \operatorname{sh} t$ donne :

$$F(x) = \int \frac{\cancel{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t}{(2\operatorname{sh} t - 1)\cancel{\operatorname{ch} t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{e^t - e^{-t} - 1} = \int \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{e^{2t} - e^t - 1}$$

Enfin $e^t = v$ donne :

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2 - v - 1}$$

intégrale où, plutôt que de décomposer en éléments simples, nous écrirons :

$$v^2 - v - 1 = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \text{d'où, avec} \quad v - \frac{1}{2} = z,$$

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2z+\sqrt{5}}{2z-\sqrt{5}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2v-1-\sqrt{5}}{2v-1+\sqrt{5}}\right| + C$$

Comme :

$$v = e^{\operatorname{Argsh} u} = e^{\ln(u+\sqrt{u^2+1})} = u + \sqrt{u^2+1} = \frac{1}{2}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)$$

nous obtenons :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5}}{x+\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5}}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $I = \int_{-2}^{1} \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{2-x}\,\mathrm{d}x$.

Observons que $[-2, 1]$ est le domaine de définition de la fonction à intégrer puisque $2 - x - x^2 = (x+2)(1-x)$. En écrivant :

$$2 - x - x^2 = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

on est conduit à poser successivement $x + \frac{1}{2} = \frac{3u}{2}$, puis $u = \sin t$, $t = \operatorname{Arcsin} u$ ce qui donne :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{1-u^2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}u}\,\frac{3}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{5-3u}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{5-3\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Un nouveau changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ permet de se ramener à une fonction paire :

$$I = \frac{9}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

intégrale où nous appliquons la méthode générale, en posant $\tan\frac{\theta}{2} = z$

Une difficulté apparente se présente, car lorsque $\theta \to \pi^-$, $z \to +\infty$. On tombe sur une « intégrale généralisée », dont la théorie sera étudiée ultérieurement.

$$I = 18\int_0^{+\infty}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2(4z^2+1)} \qquad \text{(ceci après calcul)}$$

Cette intégrale, bien qu'*a priori* non définie, a une valeur finie puisqu'elle est la limite quand $\alpha \to \pi$ de $\frac{9}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$, cette limite étant précisément I.

On calcule I par décomposition en éléments simples :

$$I = \int_0^{+\infty}\left[\frac{6}{(z^2+1)^2} + \frac{2}{z^2+1} - \frac{8}{4z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

Or :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = [\operatorname{Arctan} z]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{4z^2+1} = \frac{1}{2}[\operatorname{Arctan}(2z)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

donc $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$ existe, et, par $z = \tan\varphi$, devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}$.

courbe plane C susceptible d'une représentation paramétrique rationnelle $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, se ramène à celle d'une fraction rationnelle de la variable t. Une telle intégrale s'appelle une intégrale abélienne (du nom de Abel, mathématicien norvégien, 1802-1829) relative à la courbe unicursale C.

E. CALCUL NUMÉRIQUE APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

Lorsque la primitive de f n'est pas calculable élémentairement, ou demanderait des calculs très longs, on est conduit à calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par une méthode approchée. On peut classer les méthodes d'intégration approchée en deux catégories :

- les méthodes fondées sur les séries, qui seront étudiées ultérieurement,
- les méthodes d'origine graphique.

Ce sont ces dernières que nous allons indiquer ici. Notons que dans bien des cas, la précision de ces méthodes est telle que la valeur exacte, quand on la connaît, et la valeur approchée d'une intégrale, calculées à l'aide d'une calculatrice par exemple, sont les mêmes.

Les trois méthodes classiques sont la **méthode des rectangles,** celle **des trapèzes** et celle de **Simpson**. Toutes trois partent de la même idée, à savoir le partage de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n intervalles égaux $[x_k, x_{k+1}]$, de longueur $\frac{b-a}{n} = h$ (on pose ici encore $x_0 = a$, $x_n = b$) et l'assimilation de la fonction f à intégrer, sur chacun de ces intervalles, à une fonction g_k facile à intégrer. Ainsi dans les trois cas nous décomposons :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} I_k, \quad I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et nous prenons pour I_k une valeur approchée $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{4z^2+1} = \frac{1}{2}\,[\text{Arctan}\,(2z)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ existe, et, par $z = \tan\varphi$, devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$.

En définitive :

$$I = \frac{6\pi}{4} + \pi - 8\,\frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Notons que, plus généralement, une intégrale $F(x) = \int f[x, y(x)]\,dx$, où $x \mapsto y(x)$ est une fonction définie par une relation $g(x, y) = 0$, définissant une

... Ainsi dans les trois cas nous décomposons :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} I_k, \quad I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

et nous prenons pour I_k une valeur approchée $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\,dx$.

2.1. MÉTHODE DES RECTANGLES

Dans la méthode des rectangles, nous prenons pour g_k la fonction constante égale sur $[x_k, x_{k+1}]$ à $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, valeur de f au centre de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, de sorte que :

$$J_k = hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

et :

$$\boxed{I \simeq J = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)} \quad (1)$$

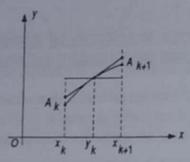


Figure 2-2

Cherchons à évaluer un majorant de l'erreur commise en approchant I par J. On a :

$$I - J = \sum_{k=0}^{n-1} (I_k - J_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(y_k)]\,dx$$

avec : $$y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

En supposant que f admet une dérivée seconde continue sur $[a, b]$, la formule de Taylor permet d'écrire :

$$f(x) - f(y_k) = (x - y_k)f'(y_k) + \frac{(x-y_k)^2}{2} f''(c), \quad c \in\,]x, y_k[$$

d'où : $I_k - J_k = f'(y_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-y_k)^2 f''(c)\,dx$

La première intégrale vaut $\left[\frac{(x-y_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 0$, puisque :

$$x_{k+1} - y_k = y_k - x_k = \frac{h}{2}$$

Dans la seconde, nous ne pouvons pas faire sortir $f''(c)$ du signe $\int$, car c dépend de x, mais nous pouvons écrire :

$$|I_k - J_k| \leq \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2\,\mu\,dx = \frac{\mu}{2}\,\frac{(x_{k+1}-y_k)^3 - (x_k - y_k)^3}{6}$$

avec : $$\mu = \sup |f''(x)|$$

soit encore : $$|I_k - J_k| \leq \frac{\mu}{12}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{\mu h^3}{48}$$

Cette majoration ne dépendant pas de k, nous aurons :

$$|I - J| \leq \sum_{0}^{n-1} |I_k - J_k| \leq \frac{n\mu h^3}{48}$$

Comme $h = \frac{b-a}{n}$, nous obtenons pour la méthode des rectangles un majorant ε_R de l'erreur :

$$\boxed{\varepsilon_R = \frac{(b-a)^3}{48n^2}\,\sup|f''(x)|}$$

Observons que l'aire du rectangle limité par les droites $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, $y = 0$, $y = y_k$ est la même que celle du trapèze limité par les trois premières droites et la tangente à la courbe au point d'abscisse y_k. On assimile donc l'arc $\widehat{A_k A_{k+1}}$ à cette tangente (voir figure 2-2).

2.2. MÉTHODE DES TRAPÈZES

Dans la méthode des trapèzes, nous prenons pour g_k la fonction affine égale à f aux points extrêmes du sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ (fig. 2-3). J_k est alors égal à l'aire du trapèze $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$, soit :

$$J_k = \frac{h}{2}\,[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

et on obtient :

$$\boxed{I \simeq J = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]} \quad (2)$$

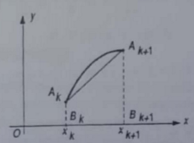


Figure 2-3

Un calcul analogue au précédent montrerait que l'approximation de cette méthode est elle aussi proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$, mais moins bonne que celle de la méthode des rectangles. Précisément on otbient :

$$\boxed{\varepsilon_\tau = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup |f''(x)|}$$

2.3. MÉTHODE DE SIMPSON

La méthode de Simpson consiste à assimiler l'arc $\widehat{A_k A_{k+1}}$ à un arc de parabole d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ou un segment de droite, car α peut être nul) passant par A_k, A_{k+1} et par C_k d'abscisse $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = y_k$, sur la courbe C, graphe de f.

α, β, γ sont bien définis ainsi, par un calcul immédiat, mais leurs valeurs n'interviendront pas directement. Nous allons en effet exprimer $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, dx$ en fonction de $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$ et $f(y_k)$. Si dans J_k nous effectuons le changement de variable $x - y_k = t$, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ devient $\varphi(t) = \alpha t^2 + \beta_1 t + \gamma_1$, et :

$$J_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\alpha t^2 + \beta_1 t + \gamma_1)\, dt = \alpha \frac{h^3}{12} + \gamma_1 h$$

Or :

$$f(x_k) = \varphi\left(-\frac{h}{2}\right) = \alpha \frac{h^2}{4} - \beta_1 \frac{h}{2} + \gamma_1$$

$$f(x_{k+1}) = \varphi\left(\frac{h}{2}\right) = \alpha \frac{h^2}{4} + \beta_1 \frac{h}{2} + \gamma_1$$

$$f(y_k) = \varphi(0) = \gamma_1$$

$$f(x_k) + f(x_{k+1}) = \alpha \frac{h^2}{2} + 2\gamma_1$$

de sorte que :

$$J_k = h\left(\alpha \frac{h^2}{12} + \gamma_1\right) = h\left[\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{6} + \frac{2}{3} f(y_k)\right]$$

ou encore : $$J_k = \frac{h}{6}\left[f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right]$$

Cette formule, dite **« des trois niveaux »**, est rigoureuse pour une fonction f du second degré, et aussi du troisième, car un terme en t^3 dans $\varphi(t)$ ne changerait rien au calcul. Dans le contexte d'une fonction f quelconque, J_k est, comme prévu, une approximation de I_k, et la relation $I \simeq \sum_{k=0}^{n-1} J_k$ conduit à la formule de Simpson :

$$\boxed{I \simeq \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right]} \qquad (3)$$

Avec d'autres notations, si $\alpha_0 = a$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n} = b$ partagent $[a, b]$ en $2n$ intervalles égaux, la formule de Simpson s'écrit encore :

$$\boxed{I \simeq \frac{b-a}{6n}\left[f(\alpha_0) + f(\alpha_{2n}) + 2\sum_{1}^{n-1} f(\alpha_{2k}) + 4\sum_{0}^{n-1} f(\alpha_{2k+1})\right]} \qquad (3')$$

Un calcul assez long, analogue dans son principe à celui effectué pour la méthode des rectangles, mais nécessitant des développements de Taylor à l'ordre 4, montrerait qu'un majorant de l'erreur commise dans la méthode de Simpson est :

$$\boxed{\varepsilon_s = \frac{(b-a)^5}{2\,880 n^4} \sup \left|f^{(4)}(x)\right|}$$

dont une autre démonstration fait l'objet de l'exercice 54 (voir énoncé) ; (intéressant seulement lorsque $f^{(4)}$ est facile à calculer et majorer).

Cette dernière méthode est donc beaucoup plus performante que les deux premières, c'est elle qui le plus souvent est programmée ou programmable dans les calculatrices électroniques.

2.4. MÉTHODE DE ROMBERG

En fait, il n'est pas indispensable de connaître les coefficients intervenant dans ces évaluations de l'erreur, mais seulement de savoir que dans les méthodes des rectangles et des trapèzes, l'approximation est « en h^2 », et, dans la méthode de Simpson, « en h^4 ». En effet, dans la pratique, on peut envisager des subdivisions successives en 2, 4, 8, ..., 2^n parties égales, d'où une suite de valeurs

approchées $I_1, I_2, \ldots, I_n$, qui pour n infini converge vers I, et, dans le cas d'une approximation en h^2, écrire, posant $h_n = \frac{b-a}{2^n}$:

$$I_n = I + c\, h_n^2 + h_n^3\, \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

(car, vu que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^{2p+1}\, dx = 0$, le développement de I_n suivant h_n n'a que des termes pairs). Sans connaître c, on a encore :

$$I_{n+1} = I + c\, h_{n+1}^2 + h_{n+1}^3\, \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

or $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$, donc :

$$I_{n+1} = I + c\, \frac{h_n^2}{4} + h_n^3\, \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

on peut donc éliminer les h_n^2 en écrivant :

$$K_n = \frac{4I_{n+1} - I_n}{3} = I + h_n^3\, \varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right) = I + \gamma h_n^4 + h_n^5\, \varepsilon_4\left(\frac{1}{n}\right)$$

arrivant ainsi à une approximation en h^4, qui peut être améliorée encore en réitérant le procédé :

$$K_{n+1} = I + \gamma \frac{h_n^4}{16} + h_n^5\, \varepsilon_5\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où : $$L_n = \frac{16K_{n+1} - K_n}{15} = I + \delta h_n^6 + h_n^7\, \varepsilon_6\left(\frac{1}{n}\right)$$

approximation en h^6, et ainsi de suite.

Ce procédé d'accélération de la convergence est connu sous le nom de méthode de Romberg. Il n'est évidemment intéressant que pour un n assez grand, de sorte que c, γ, δ soient « petits » devant 2^{2n}, 2^{4n}, 2^{6n}.

Exemple d'application de la méthode de Simpson

Calculons $I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\, dx$ (qui vaut exactement 1,5) en prenant $n = 2$ dans (3) :

$$I \simeq \frac{\pi}{18}\left(\sin 0 + \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 4 \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 2 + 4\right) \simeq 1{,}500\,6$$

L'erreur est donc $\varepsilon \simeq 6 \cdot 10^{-4}$. La théorie, avec ici $f^{(4)}(x) = \sin x$, donc $\sup \left|f^{(4)}(x)\right| = 1$ donne :

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2\,880 \times 16}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^5 \simeq 8{,}7 \cdot 10^{-4}$$

Résumé

• **Primitives fondamentales** (à une constante additive près).

$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\quad \alpha \neq -1$

$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$

$\int e^x\, dx = e^x$, $\quad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $\quad$ (a positif $\neq 1$)

$\int \cos x\, dx = \sin x$, $\quad \int \sin x\, dx = -\cos x$

$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x$, $\quad \int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$, $\quad \int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$, $\quad \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{th}\, x}$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|$, $\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x} = \ln \left|\mathrm{th}\, \frac{x}{2}\right|$, $\quad \int \frac{dx}{\mathrm{ch}\, x} = 2\, \mathrm{Arctan}\, e^x$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\, x$, $\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{Arctan}\, \frac{x}{a}$, $\quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x+a}{x-a}\right|$, $\quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\, x$, $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Argch}\, x$, $\quad x > 1$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2+k}\right|$, $\quad k \neq 0$,

Éléments simples de seconde espèce :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}\, dx, \quad p^2 - 4q < 0, \ \alpha \in \mathbb{N}^*$$

On écrit $Ax + B = A\left(x + \frac{p}{2}\right) + B - \frac{Ap}{2}$, on est ramené à :

$$\int \frac{du}{u^\alpha}, \quad \text{connu, et} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\alpha}$$

que l'on ramène par changement de variable à $\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^\alpha}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Argch} x, \quad x>1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|, \quad k \neq 0,$$

$$\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a}, \quad a \neq 0, \quad \text{si} \quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

- **Linéarité de l'intégration.**

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx, \quad (\lambda, \mu \text{ constants})$$

- **Intégration par parties.**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\,dx$$

- **Changement de variable.**

Dans $\int f(x)\,dx$, on pose $x = \varphi(t)$ (φ monotone), on a :

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

où on remplace t par $\varphi^{-1}(x)$.

Dans $\int_a^b f(x)\,dx$, on pose $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

- **Intégration des fonctions rationnelles.**

On décompose en partie entière et éléments simples de première et de seconde espèce.

Éléments simples de première espèce :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} \quad \text{si} \quad \alpha \geqslant 2, \quad \alpha \in \mathbb{N}^*$$
$$= \ln|x-a| \quad \text{si} \quad \alpha = 1$$

Éléments simples de seconde espèce :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}\,dx, \quad p^2-4q<0, \ \alpha \in \mathbb{N}^*$$

On écrit $Ax+B = A\left(x+\frac{p}{2}\right) + B - \frac{Ap}{2}$, on est ramené à :

$$\int \frac{du}{u^\alpha}, \quad \text{connu, et} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\alpha}$$

que l'on ramène par changement de variable à $\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, $\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{Arctan} \frac{t}{k}$.

Si $\alpha \geqslant 2$, on pose $\operatorname{Arctan} \frac{t}{k} = \theta$, d'où à calculer $\int \cos^{2\alpha-2}\theta\,d\theta$ que l'on obtient par linéarisation, et retour à x.

- **Intégration des fonctions rationnelles en $\cos x$, $\sin x$ (ou en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$).**

On peut toujours se ramener au cas d'une fonction rationnelle en posant $\tan \frac{x}{2} = t$ $\left(\text{ou } \operatorname{th} \frac{x}{2} = t, \text{ ou } e^x = u\right)$.

Mais il est souvent possible d'utiliser des changements de variable plus simples, ou de procéder par linéarisation (voir le cours détaillé).

- **Intégration de certaines fonctions irrationnelles.**

$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx$, f rationnelle, n entier $\geqslant 2$:

prendre comme variable : $\quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$

$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: par changement de variable, on est ramené à $\int F(t, \sqrt{u})\,dt$, où u peut prendre l'une des trois formes $1+t^2$, $1-t^2$, t^2-1, et on élimine le radical par un nouveau changement de variable :

si $u = 1+t^2$, $t = \operatorname{sh}\varphi$, ou $t = \tan\theta$

si $u = 1-t^2$, $t = \sin\varphi$, ou $t = \cos\theta$, ou $t = \operatorname{th}\alpha$

si $u = t^2-1$, $t = \varepsilon \operatorname{ch}\varphi$ $(\varepsilon = \pm 1)$, ou $t = \frac{1}{\cos\theta}$.

- **Calcul numérique approché d'une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$.**

En posant :

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n},\ k = 0, 1, 2, \dots, n\,; \qquad \varepsilon = \text{erreur commise}$$

Formule des rectangles :

$$I \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right), \qquad |\varepsilon| < \frac{(b-a)^3}{48n^2}\sup|f''(x)|$$

Formule des trapèzes :

$$I \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right], \qquad |\varepsilon| < \frac{(b-a)^3}{24n^2}\sup|f''(x)|$$

Formule de Simpson :

$$I \simeq \frac{b-a}{6n}\sum_{0}^{n-1}\left[f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right],$$

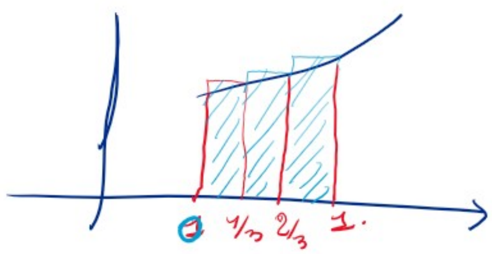
$$|\varepsilon| < \frac{(b-a)^5}{2\,880n^4}\sup|f^{(4)}(x)|$$

Accélération de la convergence par la méthode de Romberg :

De $\quad I_n = I + c\,h_n^2 + h_n^3\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right), \quad I_{n+1} = I + c\,\frac{h_n^2}{4} + h_n^3\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$

on passe à :

$$K_n = \frac{4I_{n+1} - I_n}{3} = I + \gamma h_n^4 + h_n^5\varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad h_n = \frac{b-a}{2^n}$$



- $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Exemple : $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

Exemple :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n^2+k^2} \ ?$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cancel{n}\cdot k/n}{n^{\cancel{2}}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

École Nationale des Sciences Appliquées.
1ère année -CP1- 2e sem.

"If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is."
~ John Louis von Neumann

contrôle continu analyse durée : $1h^{35}$

exercice 1.

Trouver : $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right) = U_n.$

$(a-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k (-1)^{n-k}.$

---

exercice 2. Démontrer, à l'aide d'une intégration convenable, la relation :

$$C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

---

exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Donner une relation de récurrence permettant de calculer I_n. $n \geq 2.$

---

exercice 4. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$, telle que $f(1) = 1$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement inférieure à $1 + \frac{\pi}{4}$.

---

exercice 5. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x .$$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

Ex1 :

On a $U_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

$v_n = \ln(U_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}\right).$

$= -\ln(n) + \frac{1}{...}\ln((2n)!)$

$$= -\ln(n) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!}\right).$$

$$= -\ln(n) + \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!)\right].$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!) - n\ln(n)\right]$$

or ona: $\ln((2n)!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{2n} k\right)$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \ln(k)$$

et $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$

donc $\ln((2n)!) - \ln(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k).$

et $n\ln(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(n).$

d'où $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - \ln(n).$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

$j = k - n$.

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{j+n}{n}\right).$$

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$

$u(x) = \ln(1+x) \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x}$

$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x.$

et ona : $\int_0^1 \ln(1+x) = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx.$

$$\int_0^1 \ln(1+x) = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \ln(2) - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\ln(2) - 1 \qquad a^b = e^{b\ln(a)}$$

comme $v_n = \ln(u_n)$ c-à-d $u_n = e^{v_n}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{2\ln(2)-1}$

$$= \frac{4}{e}$$

Ex 2:

On a : $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$

donc $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 t^{k-1}\,dt$

$k' = k-1$ $\qquad = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,dt$

$x = t-1$ $\qquad = \int_0^1 \frac{t^n - 1}{t-1}\,dt$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n - 1}{x}\,dx$$

$t = -x$

$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\qquad = -\int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{+t}\,{+dt}$

$C_n^0 = 1$ $\qquad = -\int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-t)^k - 1}{t}\,dt$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k t^{k-1}\,dt$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$$

$$= C_n^1 - \frac{C_n^2}{2} + \frac{C_n^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} C_n^k}{k}$$

Ex3 :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,dt$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} 1\,dt = \pi/4$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(t)\,dt = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,dt$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\left[\ln|\cos(t)| \right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 \right]$$

$$= \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$$

2) noté que $\tan'(x) = \dfrac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$

$n \geq 2$.

$$\tan^n(x) = \tan^{n-2}(x) \cdot \tan^2(x)$$

$$= \tan^{n-2}(x) \cdot \tan'(x) - \tan^{n-2}(x)$$

d'où

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx = \left[\frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} \right]_0^{\pi/4} - I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + I_{n-4} + \frac{1}{n-5} - I_{\ldots}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + I_{n-4} + \frac{1}{n-5} - I_0$$

$$I_{n-2} = \frac{1}{n-3} - I_{n-4}$$

si $n = 2k$.

$$I_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5} - \dots + (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

si $n = 2k+1$,

$$I_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5} + \dots + (-1)^k \frac{\ln(2)}{2}$$

Ex 4 :

On a : $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)} \geqslant 0$.

donc f est $\nearrow$ et de plus $f(x) \geqslant f(1) = 1 \ \forall x \in [1, +\infty[$.

donc $x^2 + f^2(x) \geqslant 1 + x^2$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

de plus on a : $\displaystyle\int_1^X f'(x)\,dx = [f(x)]_1^X = f(X) - 1$.

donc $\displaystyle f(x) = \int_1^x f'(t)\,dt + 1$

$$\leqslant \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + 1$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt + 1 =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} \arctan(x) = \pi/2 \\ \arctan(1) = \pi/4 \\ \arctan(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\leqslant [\arctan t]_1^{+\infty} + 1$$

$$\leqslant \pi/2 - \pi/4 + 1 = \pi/4 + 1$$

$$\begin{cases} \arctan(1) = \pi/4 \\ \arctan(0) = 0 \end{cases}$$

$$\leq [\arctan t]_1^{+\infty} + 1$$

$$\leq \pi/2 - \pi/4 + 1 = \pi/4 + 1$$

$$\begin{cases} f \text{ est } \nearrow \\ f \text{ bornée par } \pi/4 + 1 \end{cases}$$ don $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe.

et de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq \pi/4 + 1$.

Ex 5

On a : $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in [0,1]$.

donc $\frac{\sin(x)}{x^2+a^2} \geqslant \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x^2+a^2}$.

d'où $\underbrace{\int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x^2+a^2}\, dx}_{I_a} \leq \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx$.

on $I_a = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+a^2}\, dx - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x(x^2+a^2) \quad x a}{x^2+a^2}\, dx$.

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) - \frac{x^2}{12} + \frac{a^2}{12}\ln(x^2+a^2)\right]_0^1$$

$$I_a = \frac{1}{2}\ln(1+a^2) - \frac{1}{12} + \frac{a^2}{12}\ln(1+a^2) - \frac{1}{2}\ln(a^2)$$
$$- \frac{a^2}{12}\ln(a^2).$$

$$\xrightarrow[a \to 0^+]{} +\infty$$

Comme $I_a \leq \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2+a^2}\, dx$.

donc $\lim_{a \to 0^+} \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2+a^2}\,dx = +\infty.$

École Nationale des Sciences Appliquées.
1ère année -CP1- 2e sem.

"la condition de la cohérence est l'incomplétude, l'indicible." kurt Gödel

contrôle continu analyse durée : $1h^{35}$

exercice 1. Soit a un réel strictement positif. Calculer

$$\int_{1/a}^{a} \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

à l'aide du changement de variables $x = \frac{1}{y}$.

---

exercice 2. Déterminer les limites des suites suivantes:

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\frac{k\,\pi}{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

---

exercice 3. Calculer :

$$\int \operatorname{Arctg} x\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}.$$

---

exercice 4. Etudier la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\cdot \sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

---

exercice 5. Soit f la fonction affine par morceaux et continue sur $[1,+\infty[$ telle que :

(i): $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f\left(n+\frac{1}{2}\right) = n$

et (ii): $f(n) = f\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n\cdot 2^n}\right) = f\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n\cdot 2^n}\right) = f(n+1) = 0,$

de manière à ce que la courbe représentative de f soit constituée de 4 segments de droite sur chaque $[n, n+1]$, pour tout n entier > 1.

Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et que f n'est pas nulle à l'infini.

Ex1: $\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx.$

$y = 1/x.$ ⟵ $x = \frac{1}{y}$ donc $dx = \frac{-1}{y^2}\,dy.$

$x = a \longrightarrow y = \frac{1}{\ }$

$y = 1/x$.

$$x = a \iff y = \frac{1}{a}.$$
$$x = 1/a \iff y = a.$$

d'où $I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx = \int_{a}^{1/a} \frac{-\ln(1/y)}{\frac{1}{y^2}+1} \times \frac{1}{y^2}\,dy.$

$I = -I$ $$= \int_{a}^{1/a} \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,dy.$$

$$= -\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = -I$$

d'où $\boxed{I = 0}$

Ex 2:

$$U_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right).$$

$$\Big\downarrow n \to +\infty.$$

$$I = \int_0^1 x^2 \cos(\pi x)\,dx.$$

$$u(x) = x^2 \longrightarrow u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = \cos(\pi x) \longrightarrow v(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

$$I = \left[x^2 \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \sin(\pi x).$$
$$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\,dx\right).$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left(\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\sin(\pi x)\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi^2}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{-2}{\pi^2}.$$