$f : I \to \mathbb{R}$, C^∞

$x \in V_0$

$$f(x) = e^x \times \cos(x) - \sin(x) \cdot \operatorname{Arctan}(e^{\cos(x)}) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon(x)$$

$\cos(1)$

$$\cos(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{2k!}$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \dots$$

$x^6 = o(x^n)$

I - Formules de Taylor-Lagrange :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ application dérivable $n+1$ fois. $(0 \in I)$, $x > 0$

$\exists c \in]0, x[$,

alors $\left(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right)$

" La formule de Taylor-Lagrange "

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

l'ordre 0, $f(x) - f(0) = \frac{f'(c)}{1!}(x - 0)$

Application :

$f(x) = e^x$

On veut une approximation de e à l'ordre 10^{-2}. $0 < x \leq 1$.

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^c x^6}{6!}$$

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{e^c}{6!}$$

On sait que $\frac{e}{n!} \to 0$.

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} +$$

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}$$

On veut déterminer la formule de Taylor-Lagrange pour $x \to \cos x$.

☞ **Exercice 3.** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a- Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $|\cos(x) - u_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \cos(x)$.

☞ **Exercice 4**

Soit h une fonction définie sur $]0, 2[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{2-x}$$

Calculer les quatre premières dérivées successives de h au point $x_0 = 1$: c'est-à-dire $h^{(1)}(1)$, $h^{(2)}(1)$, $h^{(3)}(1)$, et $h^{(4)}(1)$.

$f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$

$f^{(4)}(x) = \cos(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x)$

$\cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = -\cos(x) = \cos''(x)$

$\cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) = \cos^{(3)}(x)$

$f(x) = \cos(x)$

a) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \frac{x^{2n}}{2n!} + \cos\left(c + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= u_n(x) + \cos\left(c + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$|\cos(t)| \leqslant 1$

donc $|f(x) - u_n(x)| = \left|\cos\left(c + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right| \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ alors $a_n \to 0$.

$'' \ell$

$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$

pour $\varepsilon + \ell < 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n \geqslant N$.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + \ell$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \varepsilon + \ell$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < \varepsilon + \ell$

$\vdots$

$\ell - \varepsilon < \frac{a_{N+1}}{a_N} < \varepsilon + \ell$

$\Rightarrow \underbrace{(\ell - \varepsilon)}_{<1}^{n-N} < \frac{a_{n+1}}{a_N} < \underbrace{(\varepsilon + \ell)}_{<1}^{n-N}$

$\to 0$

$\Rightarrow a_{n+1} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} (\ell - \varepsilon)^{n-N} = 0$

$\lim_{n\to\infty} (\ell + \varepsilon)^{n-N} = 0$

b- $|u_n(x) - \cos(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = W_n(x)$

$\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 0$

On a $\frac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$

$(n+1)! = (n+1)\, n!$

donc $W_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ainsi $\lim_{n\to\infty} |u_n(x) - \cos(x)| = 0$

d'où, $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \cos(x)$,

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

II - Développement Limité :

1. Comparaison des suites et des fonctions :

Négligeabilité :

suites :

$$u_n \overset{n\to\infty}{=} o(v_n)$$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Ex :

$$n^a = o(n^b)$$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^b} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{a-b} = 0$

$\Leftrightarrow$ $b > a$

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

fonctions :

$$f(x) \overset{a}{=} o(g(x))$$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$x^m \overset{0}{=} o(x^n) \quad ?$$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = 0 \Leftrightarrow m > n$.

α, β deux applications définies sur I.

opérations,

$$\alpha(x)\, o(\beta(x)) = o(\alpha(x)\,\beta(x))$$

$$o(\alpha(x)) + o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$$

$$o(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x)).$$

Équivalence

On dit que

$$u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n \qquad\qquad f(x) \overset{a}{\sim} g(x)$$

$u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

$\Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

$f(x) \overset{a}{\sim} g(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$.

Exp.

$\ln(x+1) \overset{0}{\sim} x$, $\sin(x) \overset{0}{\sim} x$

$\cos(x) \overset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$, $e^x \sim x + 1$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $e^{n^2+n} \overset{n\to\infty}{\sim} e^{n^2}$

$n \in \mathbb{N}$.

DL :

- soit f une fonction de classe C^n dans I ($0 \in I$)

le développement limité d'ordre de f au voisinage de 0 est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} \\ \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2.3}{(1-x)^4} \end{array}\right.$$

$\vdots$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - x^n/n + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

☞ **Exercice 6**

1. Déterminer les développements limités suivants :

   (a) $DL_4(0)$ de la fonction $\cos(x^4)$ **(b)** $DL_4(0)$ de la fonction $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

   (c) $DL_3(\frac{\pi}{3})$ de la fonction $\cos(x)$ **(d)** $DL_4(2)$ de la fonction $\frac{x}{x-1}$.

2. Calculer le D.L à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$.
3. En utilisant un développement limité approprié, étudier les limite suivantes

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \qquad (b)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)}\right).$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{2(\tan(x) - \sin(x)) - x^2}{x^5}, \qquad (d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

4. Déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right].$$

$n > m$

$x^m = o(x^n)$

a) $$\cos(x^4) = 1 - \frac{(x^4)^2}{2!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^8}{2!} + o(x^4)$$
$$= 1 + o(x^4)$$

b) $$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - x^3/3! + x^5/5!}{x}\right) + o(x^4)$$
$$= \ln\left(1 - x^2/3! + \frac{x^4}{5!}\right) + o(x^4)$$
$$= \ln\left(1 - \underbrace{\left[\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!}\right]}_{X \to 0}\right) + o(x^4)$$
$$= \ln(1 - X) + o(x^4)$$
$$= -X - \frac{X^2}{2} + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{36} + o(x^4)$$
$$= \frac{1}{6}\left(-x^2 + \frac{x^4}{20} - \frac{x^4}{6}\right) + o(x^4)$$
$$= \frac{1}{6}\left(-x^2 + \frac{6x^4 - 20x^4}{120}\right) + o(x^4)$$
$$= \frac{1}{6}\left(-x^2 - \frac{7}{6}x^4\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-x^2 - \frac{7}{60}x^4\right) + o(x^4)$$

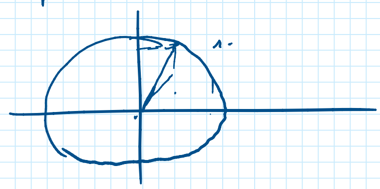
$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$$

c) $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos(x)$.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x - \pi/3\right)^2}{2!}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\left(x - \pi/3\right)^3}{3!}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\left(x - \pi/3\right)^2}{2!}\,\frac{1}{2} + \frac{\left(x - \pi/3\right)^3}{3!}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + o\left(x - \pi/3\right)^3$$



$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\overset{0}{t} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{t^3}{3!}\right) + o(t^3)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{t^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}t^3 + o(t^3)$$

4- $DL_4(2) = \frac{x}{x-1}$, $\boxed{t = x - 2}$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x-2+1} = \frac{t+2}{t+1} = (t+2)\left[1 - t + t^2 - t^3 + t^4\right] + o(t^4)$$

$$= t - t^2 + t^3 - t^4 + 2 - 2t + 2t^2 - 2t^3 + 2t^4 + o(t^4)$$

$$= 2 - t + t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4).$$

$\frac{1}{x}$

$$= 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4 + o(x-2)^4$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sh\left(\sqrt{x^2+x}\right) - sh\left(\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} - \frac{x^6}{6}\ln^2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{sh\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) - sh\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} - \frac{x^6}{6}\ln^2(x)}$$

e^x

$$- \left[e^{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right]^x$$

$$+ \frac{1}{2x}$$

$-e$

e T_x

$e \quad 2x \quad -i \quad + 2x)$

$$sh(x) \cdot \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x - shx\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$$

$$sh(x)\, e^{1/2} - sh(x)\, e^{-1/2}$$

$$A \frac{e^x - e^{-x}}{2\left[e^x - \frac{x^6}{5} \ln^2(x)\right]}$$

$$A \frac{1 - e^{-2x} \to 0}{2\left(1 - \frac{x^6 \ln^2(x)}{e^x} \to 0\right)} = \frac{A}{2}$$

$$e^x = \sum_{k=1}^{100} \frac{x^k}{k!} + o(x^{-100})$$

$\Rightarrow$

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$$