Exercice 63

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

1) Établir une relation de récurrence entre I_n et $I_{n-1}, n \in N^*$
2) Calculer I_0 puis en déduire la valeur de I_n en fonction de n
3) En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez une autre expression de I_n. Que peut-on en conclure?

1) I_n et I_{n-1} :

$$I_n = \int x^n \cdot \sqrt{1-x}\, dx$$

$u = x^n \qquad u' = n x^{n-1}$

$v'(x) = \sqrt{1-x} \qquad v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \cdot x^n\right]_0^1 + \frac{2}{3} n \int x^{n-1}(1-x)^{3/2}\, dx.$$

$$= 0 + \frac{2}{3} n \left\{ \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x}\,(1-x)\, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{3} n \left\{ \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\, dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx \right\}$$

$$I_n = \frac{2}{3} n \left\{ I_{n-1} - I_n \right\}.$$

$$I_n \left\{ 1 + \frac{2n}{3} \right\} = \frac{2n}{3} I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

2) I_0 et $I_n = f(n)$:

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1} I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_1 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2n-2}{2n+1} \times \cdots \times \frac{2}{5\times 3} \times \frac{2}{2}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2n-2}{2n+1} \times \dots \times \frac{2}{[\times 3]} \times \frac{2}{1}$$

$$I_n = \frac{2^{n+1}\, n!\; 2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2^{2n+2} \cdot (n!)^2 \cdot (n+1)}{(2n+3)!} \qquad (n+1)! = (n+1)\, n!$$

3) $$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{1/2}\, dx \qquad (a+(b))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k (b)^{n-k}$$

$$t = 1-x \implies dt = -dx \qquad (1-t)^n = ((-t)+1)^n$$

$$x^n = (1-t)^n \qquad = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot t^k$$

$$I_n = -\int_1^0 (1-t)^n\, t^{1/2}\, dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^n \cdot t^{1/2}\, dt$$

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot t^{k+\frac{1}{2}}\, dt$$

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{k+1/2}\, dt$$

$$I_n = \sum_0^n C_n^k (-1)^k \left. \frac{t^{k+3/2}}{k+\frac{3}{2}} \right|_0^1$$

$$I_n = \sum_0^n C_n^k (-1)^k \frac{2}{2k+3}$$

$$\sum C_n^k (-1)^k \times \left(\frac{2}{2k+3}\right) = \frac{n!\,(n+1)!\; 2^{2n+2}}{(2n+3)!}$$

Exercice 64 **Exercice 1 (10 pointe) (ENSATE)**

On considère l'intégrale généralisé :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

1) Montrer que d'intégrale I_n converge pour tout $n \geq 1$
2) A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}du$$

3) A l'aide du changement de variable $w = u - \frac{1}{u}$ Calculer I_1.
4) Trouver une relation récurrente entre I_{n+1} et I_n
5) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
6) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

---

1) $x \mapsto \frac{1}{(1+x^4)^n}$ CPM sur $[0,+\infty[$. Le point incertain est $+\infty$.

$$\frac{1}{(1+x^4)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4n}}$$

or $n \geq 1$: $4n \geq 4 > 1$ donc : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}}$ CV $(\alpha = 4n > 1)$

d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$

2) I_1 :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} \quad (u=x)$$

$x = \frac{1}{u} \to dx = -\frac{du}{u^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x \to +\infty \Rightarrow u \to 0 \\ x \to 0 \Rightarrow u \to +\infty \end{array} \right.$

$$I_1 = \int_{+\infty}^{0} -\frac{du}{u^2} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{1}{u^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,du}{u^4+1}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}du - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}}_{I_1}$$

$$2I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}du$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}du.$$

3) $\left(w = u - \frac{1}{u} = \frac{u^2-1}{u} \right.$

$$dw = du + \frac{du}{u^2} = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)du.$$

$$dv = du + \frac{du}{u^2} = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du.$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{u^2}}{u^2 + \frac{1}{u^2}} du$$

$$v^2 = \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = u^2 - 2 + \frac{1}{u^2} = u^2 + \frac{1}{u^2} - 2$$

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = v^2 + 2.$$

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2+2} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2 \int_0 f(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

4) I_n, I_{n+1} :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^n (x^4+1)} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^n}$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{-x^3 . x}{(1+x^4)^{n+1}} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{(1+x^4)'}{(1+x^4)^{n+1}} . x . dx$$

$$u = x \longrightarrow u' = 1$$

$$v' = \frac{x^3}{(1+x^4)^{n+1}} = \frac{1}{4} \frac{(x^4+1)'}{(1+x^4)^{n+1}} \longrightarrow v(x) = -\frac{1}{4n} \frac{1}{(1+x^4)^n}$$

$$I_{n+1} - I_n = \left[-\frac{1}{4n} x . \frac{1}{(1+x^4)^n} \right]_0^{+\infty}$$

0

$$+\frac{1}{4n}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{dx}{(1+x^4)^n}}_{I_n}$$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{4n} I_n$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{4n+1}{4n} I_n}$$

Exercice 65

On considère l'intégrale $\quad I_n = \int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer I_1
2) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} $\quad (n \geq 2)$
3) Calculer I_n en fonction de n
4) Déterminer, pour n fixé, la limite de $I_n(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$
5) On pose $J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt$. Montrer que pour tout $n \in N^*$: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$
6) On pose $L_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. Montrer, en utilisant le calcul de I_n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad U_n \leq e \leq U_n + \frac{1}{n!}$.
7) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

1°) I_1 :

$$I_1 = \int_0^x t.\, e^{1-t}\, dt$$

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{1-t} \rightarrow v = -e^{1-t}$$

$$I_1 = \left[-t.\, e^{1-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{1-t}\, dt.$$

$$I_1 = -x.e^{1-x} - e^{1-x} + e$$

2) I_n et I_{n-1} :

$$I_n = \int_0^x \frac{t^n}{n!}.e^{1-t}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{t^n}{n!} \rightarrow u' = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ v' = e^{1-t} \rightarrow v = -e^{1-t} \end{cases}$$

$$I_n = \left(-\frac{t^n}{n!}.\, e^{1-t}\right)_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t}$$

$$I_n = -\frac{x^n}{n!} e^{1-x} + I_{n-1}$$

$$I_n = I_{n-1} - \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$$

3) $I_n = f(n)$:

$$I_n = I_{n-1} - \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$$

$+$

$$I_{n-1} = I_{n-2} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{1-x}$$

$+$

$\vdots$

$$I_2 = I_1 - \frac{x^2}{2!} e^{1-x} = e - x \cdot e^{1-x} - e^{1-x} - \frac{x^2}{2!} e^{1-n}$$

$$I_n + \cancel{I_{n-1}} + \cancel{I_{n-2}} + \dots + \cancel{I_2} = \cancel{I_{n-1}} + \cancel{I_{n-2}} + \cancel{I_2} + I_1 - \overbrace{\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \frac{x^2}{2!}\right)}^{k=2} e^{1-x}$$

$$I_n = e - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{1-x}$$

4) $\lim\limits_{+\infty} I_n$:

$$\lim_{+\infty} I_n = e$$

5)

$$\delta_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n \cdot e^{1-t}}{n!} \geqslant 0$$

$$I_n = I_{n-1} - \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$$

$x = 1$:

$$\delta_n = J_{n-1} - \frac{1}{n!} \geqslant 0$$

$-$

Exercice 61

Soit $\quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad n \in \mathbb{Z}$.

1) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, I_n existe t-il?.
2) Établir une relation de récurrence entre les I_n
3) Calculer I_n.