Corollaire
Critère de Riemann au voisinage de l'infini

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

1. S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente
2. S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

VOIR LA PREUVE

Corollaire
Critère de Riemann au voisinage d'un réel a

Soient a et b deux réels, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

1. S'il existe un réel $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.
2. S'il existe un réel $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente..

VOIR LA PREUVE

Exercice 34

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1) $J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$
2) $J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2\,dt$
3) $J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5}\,dx$
4) $J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}^2}{x}\,dx$

1°) $J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt.$

$t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est cpm. sur $]0,1]$. on a un problème en "0".

$\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$

$\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{0}{\sim} 1$

$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \int f$ et $\int g$ sont de même nature (CV / CV, dV / dV)

$\int_0^1 1\,dt = 1$: CV

$\Rightarrow$ J_1 est convergent.

$\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln^\beta(x)}$

2) $J_2 = \int_0^1 \ln^2(t)\,dt.$

$t \mapsto \ln^2(t)$ est cpm sur $]0,1]$. on a un problème en 0.

$0 < \alpha < 1$

$t^\alpha \cdot \frac{\ln^2(t)}{t^0} = \left(t^{1/4} \cdot \ln(t)\right)^2 = 4^2\left(t^{1/4} \cdot \ln t^{1/4}\right)^2$ (x, $\ln x$)

or $\lim_0 t^{1/4} \cdot \ln(t^{1/4}) = 0$ $\quad x \to 0$

$\alpha = 1/2 < 1$: tq: $\lim_{\boxed{0}} t^{1/2} \cdot \ln^2(t) = 0$; $\int_0^1 \ln^2(t)\,dt$ est CV.

3) $J_3 = \int^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ \ln^5(x)}$ $\qquad \frac{1}{t^\alpha \cdot \ln^\beta(t)}$

3) $J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,.\,\ln^5(x)}$ $\qquad \frac{1}{t^\alpha . \ln^\beta(t)}$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln^5(x)}$ est CPM (localement intégrable) sur $[2, +\infty[$. Le seul problème est $+\infty$.

$$x^{3/4} \frac{1}{\underline{\underline{\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{\ln^5(x)} = x^{3/4 - 1/2} \cdot \frac{1}{\ln^5(x)} = \frac{x^{1/4}}{\ln^5(x)} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

$\alpha = \frac{3}{4} < 1$: tq : $\lim x^{3/4} . f(x) = +\infty$: d'où $\int f\, dx$ div.

4) $J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

1er Méthode :

$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est CPM sur $[2, +\infty[$. Le seul problème est en $+\infty$.

$\alpha \leq 1$: $\lim x^\alpha . f = \pm\infty$ $\qquad \cancel{x^1} \cdot \frac{\ln(x)}{\cancel{x^1}} = \ln(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow f$ div

2ème Méthode par définition :

$$J_4' = \int_2^t \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \int_2^t \ln'(x) \ln(x)\, dx = \left.\frac{\ln^2(x)}{2}\right|_2^t$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln^2(t)}{2} - \frac{\ln^2(2)}{2} \right) = +\infty$$

donc : $\int f\, dx$ div.

3ème Bertrand :

$$\begin{cases} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha . \ln^\beta x} : \text{CV ssi : } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \\ \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha . \ln^\beta x} : \text{CV ssi : } \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \end{cases}$$

$\alpha = 1$; $\beta = -1 < 1$: div.

Exercice 35

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

1) $J_5 = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
2) $J_6 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
3) $J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sqrt{\tan t}}$
4) $J_8 = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$

1) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^{1/2}}\, dx.$

$x \mapsto \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^{1/2}}$: est CPM sur $[0,+\infty[$. on a un problème en $+\infty$.

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^{1/2}} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^{1/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1 > 0$$

or $\int_0^{+\infty} 1\, dx$: diverge. d'où J_4 diverge.

2) $J_6 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est CPM sur $[0,1[$. on a un problème à 1.

$u = 1-t \Rightarrow t = 1-u$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{((1-t)(1+t))^{1/2}} = \frac{1}{(u.(2-u))^{1/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{(2u)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{u^{1/2}}$$

or $\int_0^1 \frac{du}{u^{1/2}}$: est cv (Intégrale de Riemann $\alpha = 1/2 < 1$)

$\Rightarrow$ J_6 : est convergente.

3. $J_7 = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{tg\, t}}$: $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{tg\, t}}$ est CPM sur $]0,\frac{\pi}{4}]$. on a problème en "0"

$tg\, t \underset{0}{\sim} t \Rightarrow \sqrt{tg(t)} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$

$$\frac{1}{\sqrt{tg(t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

or $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{t^{1/2}}$ cv $\alpha = 1/2 < 1$ (Intégrale de Riemann)

4. $J_8 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ cv

4. $J_8 = \int_0 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ CV

: $\alpha < 1$: $t^\alpha f(t) \to 0$ CV

$\alpha > 1$: $t^\alpha f(t) \to +\infty$ div

$\boxed{\alpha = \frac{3}{4}}$: $\lim_0 t^{3/4} \cdot \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$

$= \lim_0 t^{3/4 - 1/2} \cdot \ln(t)$

$= \lim_0 2 \cdot t^{1/2} \ln(t^{1/2}) = 0$

Exercice 36

Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur):

1)
$$J_9 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$$

2)
$$J_{10} = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^3 + \ln t} dt$$

3)
$$J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$$

4)
$$J_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$$

1°) $J_9 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$

$t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ C.P.M. sur $[1, +\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

$\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = \sin(u) \underset{0}{\sim} u \qquad u = \frac{1}{t^2}$

$\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$; $\alpha = 2 > 1$ est CV.

$\Rightarrow J_9$ est CV

2) $J_{10} = \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(t)}{t^3 + \ln(t)} dt$

$+\infty$: $\frac{\operatorname{Arctg}(t)}{t^3 + \ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(t^3 + \ln(t))} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^3\left(1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t^3}}_{\to 1}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^3}$

or $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ $(\alpha = 3 > 1)$ est CV

d'où la CV de J_{10}.

3. $J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{\sin(t)}}{t^{3/2}} dt$ (CA) : deux problèmes "0" et "$+\infty$"

3. $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\, dt$ (CA) : deux problème "0" et "+∞"

$\int |f|\, dx$ CV $\rightarrow \int f$ ACV

$+\infty$: $|f| = \left|\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$

$|\sin(t)| \leq 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ CV $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$

$\int |f|\, dt$ CV $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

0 : $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$

$\frac{\sin(t)}{t^{3/2}} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ CV $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right) \Rightarrow$ donc la CV $\int_0^1 f(t)\, dt$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ CV.

4. $J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}$

$t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est CPM sur $\begin{cases} [0,+\infty[& \alpha \geq 0 \\ ]0,+\infty[& \text{sinon.} \end{cases}$

* $\alpha \geq 0$: on a un problème en $+\infty$.

$\frac{t^\alpha}{1+t^2} = \frac{t^\alpha}{t^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}_{\to 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ est CV

ssi : $2-\alpha > 1$ c-à-d, $\boxed{\alpha < 1}$ ✓ V

* $\alpha < 0$: $+\infty$ et 0 :

en $+\infty$: $\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$

or $\int^{+\infty} \frac{dt}{\ldots}$ CV si $\boxed{\alpha < 1}$ * ✓

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ CV si $\boxed{\alpha < 1}$ * ✓

* en 0 : $\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$

$\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ CV ssi $-\alpha < 1$ $\alpha > -1$

J_2 CV si $-1 < \alpha < 1$.