Les fonctions de plusieurs variables

vendredi 17 février 2023 14:41

Exercice 1 **ENSAM CASA**

Déterminer les limites suivantes. (Selon les cas, X désignera le couple (x, y) ou le triplet (x, y, z))

a) $\lim_{x\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

b) $\lim_{X\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

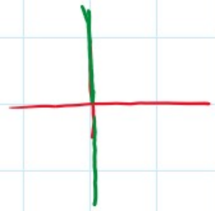
c) $\lim_{X\to(0,0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ← deg 3. ← 1.

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

→ $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

1). On a : $\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$.



2) posons $g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

On a : $g(0,y) = \frac{\sqrt{y^2}}{y} = \frac{|y|}{y}$ n'admet pas de limite en 0. donc

$\ell_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ n'existe pas.

3) On a : $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ donc $|x^3| \leq \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$.

donc $\frac{|x^3|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x^2+y^2+z^2 \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0$.

d'où $\ell_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

Exercice 2 D. **ENSAM CASA**

Après avoir donné le domaine sur lequel il n'y a pas de problème de dérivabilité partielle, calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes.

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

b) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$.

c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$ ←

d) $f(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

a) On a : $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x \neq y\}$. et pour tout $(x,y)\in D$ on a :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

b) On a : $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \neq y \text{ et } x \neq -y\}$ et pour tout $(x,y)\in D$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(\cancel{x^2}-y^2)-2x(\cancel{x^2}+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(x^2\cancel{-y^2})+2y(x^2\cancel{+y^2})}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4yx^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

c) $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{1+x}{1+y} > 0 \text{ et } y \neq -1\}.$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x>-1 \text{ et } y>-1) \text{ ou } x<-1 \text{ et } y<-1\}.$

et pour tout $(x,y)\in D$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{(1+x)(1+y)}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2|1+y|}\times\sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$$

d) On a : $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+\sqrt{x^2+y^2} > 0 \text{ et } x^2+y^2>0\}$.

- Si $x>0$ alors $(x,y)\in D$.
- si $x=0$ alors $(x,y)\in D$ ssi $y\neq 0$.
- Si $x<0$ alors $x+\sqrt{x^2+y^2}>0$ ssi $\sqrt{x^2+y^2} > -x = |x| = \sqrt{x^2}$
  ssi $y\neq 0$.

donc $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) / x\leq 0\}$ et pour tout $(x,y)\in D$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}.$$

Exercice 3 **ENSAJ 2017 (5 points)**

On considère l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f au point $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur $h=(u,v)$.
4) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|x^3| = |x|^3.$

1) On a : $|x| < \sqrt{x^2+y^2}$ donc $|x^3| \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3$

et par suite $|f(x,y)| = \dfrac{|x^3|}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$.

Rapp :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

2) On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{=0}{f(0,h)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Rapp : la dérivée en (a,b) suivant un vecteur $h=(u,v)$ est.

$$Df_h(a,b) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(u,v)) - f(a,b)}{t}.$$

3) dans notre cas.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(u,v)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tu)^3}{(tu)^2+(tv)^2}}{t} = \frac{u^3}{u^2+v^2} = f(u,v).$$

Rapp : pour montrer que f est differentiable en (a,b).

étape (1) : calcule de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

« c'est l'une des ces deux dérivée partielle n'existe pas alors automatiquement f n'est pas diff en (a,b) »

étape (1'). c'est on a déja que f n'est pas continue en (a,b). alors dans ce cas f n'est pas diff en (a,b).

étape (2). on calcule $\varepsilon(h)$; $h=(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$\varepsilon(h) \quad f((a,b)+(h_1,h_2)) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2$

étape (2). On calcule $\mathcal{E}(h)$; $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{E}(h) = \frac{f((a,b)+(h_1,h_2)) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$$

alors dans ce cas f est diff en (a,b) ssi $\lim\limits_{h\to(0,0)} \mathcal{E}(h) = 0$.

4) dans notre cas on a :

$$\mathcal{E}(h_1,h_2) = \frac{f(h_1,h_2) - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

d'où $\mathcal{E}(h_1,h_2) = \dfrac{\cancel{h_1^3} - \cancel{h_1^3} - h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \dfrac{-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.$

Remarque que $\mathcal{E}(h_1,h_1) = \dfrac{-h_1^3}{(2h_1^2)^{3/2}} = \dfrac{-1}{2^{3/2}} \neq 0.$

d'où $\mathcal{E}(h_1,h_2) \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$

et par suite la fonction f n'est pas diff en $(0,0)$.

Exercice 4 **ENSAM CASA**

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en $(0,0)$

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|x^2-y^2| \leq |x^2|+|-y^2|$
$\leq x^2+y^2.$

2) Montrer que

$$\lim_{x\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

3) En déduire que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle en $(0,0)$ est nulle.

1) On a : $|f(x,y)| = \dfrac{|xy(x^2-y^2)|}{x^2+y^2}$

$$\leq \frac{|xy|\cdot\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}} = |xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, donc f est continue en $(0,0)$.

2) $$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

2) $$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|\ldots|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|\ldots|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Rapp : f est dite différentiable en (a,b) si il existe une application linéaire (elle est unique) noté $df_{(a,b)}$ tel que :
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f((a,b)+(h_1,h_2)) = f(a,b) + df_{(a,b)}(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\| \,\varepsilon(h_1,h_2).$$

où $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$. et dans ce cas on montre que f admet des dérivée partielle en (a,b) et $df_{(a,b)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,h_2.$

3) dans notre cas on a d'après (2) $\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

c-à-d $f(h_1,h_2) = \|h_1,h_2\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$.

d'où f est diff en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} \equiv 0$

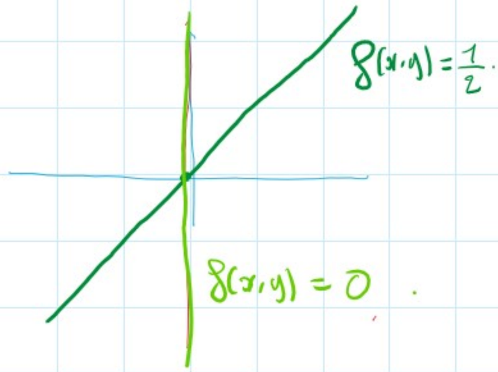
Exercice 5 **ENSAM CASA**

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et par $f(0,0) = 0$. Montrer que f est partiellement dérivable par rapport à x et par rapport à y en $(0,0)$. f est-elle continue en $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

- On a : $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$, donc f est partiellement dérivable % à x en $(0,0)$ et on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$, donc de même f est partiellement dérivable % à y en $(0,0)$ et de plus $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.



On comme $f(x,x) = \frac{1}{2}$ et $f(0,y) = 0$ alors la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.
d'où f n'est pas continue en $(0,0)$.

« Rq : dans ce cas f n'est pas diff en $(0,0)$ »

Exercice 6 **ENSAM CASA**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ et étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) On a : $|f(x,y)| \leq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$

et comme $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ et donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) On a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overset{\shortparallel 0}{f(h,0)} - \overset{\shortparallel 0}{f(0,0)}}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overset{\shortparallel 0}{f(0,h)} - \overset{\shortparallel 0}{f(0,0)}}{h} = 0$

donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

- La différentiabilité de f en $(0,0)$ • Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $\varepsilon(h) = \dfrac{f(h) -}{\|h\|} = \dfrac{h_1^2 \cdot h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^2}$

comme $\varepsilon(h_1,h_1) = \dfrac{h_1^4}{(2h_1^2)^2} = \dfrac{1}{4}$, alors $\varepsilon(h) \underset{h\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$

d'où f n'est pas diff en $(0,0)$.

Exercice 7 **ENSAM CASA**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$
4) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
5) f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

1) On a f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En $(0,0)$?

On a $|f(x,y)| = \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$

et par suite f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) On a : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{0} - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{0} - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Rapp : f est dite de classe $\mathcal{C}^1$, c'est elle admet des dérivées partielles, et de plus elles sont continues.

4)

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \frac{2x^4}{(2x^2)^2} = \frac{1}{2}$

alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \not\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue. et donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

5).

On a : $\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{f(h_1,h_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - h_1 \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{0} - h_2 \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}^{0}}{\ldots}$

3). On a : $\mathcal{E}(h_1,h_2) = \dfrac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|h\|_2}$

donc $\mathcal{E}(h_1,h_2) = \dfrac{h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$

or $\mathcal{E}(h_1,h_1) = \dfrac{h_1^3}{(2h_1^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$, alors $\mathcal{E}(h) \underset{h\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$

et par suite f n'est pas diff en $(0,0)$.

Exercice 8 **ENSAJ 2019**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2) Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
3) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

1 et 3 déja dans l'exercice 7 :

2) Soit $h=(u,v)$. M. que f admet une dérivée directionnelle suivant le vecteur $h=(u,v)$ en $(0,0)$

On a : $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(th) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{tu \times (tv)^2}{t((tu)^2+(tv)^2)} = f(h)$.

f est de classe C^1 en (a,b) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f est diff en (a,b) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ les dérivée partielle existe en (a,b).

f est diff en (a,b) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f est continue en (a,b).

les dérivée partielle existe en (a,b) $\not\Rightarrow$ f est continue en (a,b) ; f est continue en (a,b) $\not\Rightarrow$ les dérivée partielle existe en (a,b).

f est de classe C^1 en (a,b) ie. les $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue en (a,b)

f est diff en (a,b) ie. $\lim\limits_{h\to(0,0)} \mathcal{E}(h) = 0$.

f est continue en (a,b) ie. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Exercice 9 **ENSAM CASA**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+y)^2 - x^3 + x^4$.

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $(0,0)$, $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ sont les seuls points critiques de f.
3) Calculer la matrice hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4) Déterminer la nature du point critique $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.
5) Le cours permet-il de déterminer la nature du point critique $(0,0)$? Justifier votre réponse.
6) Calculer $g(x) = f(x,-x)$.
7) Étudier la fonction g au voisinage de 0 . En déduire la nature du point critique $(0,0)$.

Exercice 10 **ENSAJ 2017-2018**

Exercice 1 (4.5 points)

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y.$$

1) Déterminer les points critiques de f.
2) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
3) Pour chaque point critique, écrire la matrice hessienne de f et déterminer sa nature.

Exercice 11 **ENSAM CASA**

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x + 2y$.

1) Montrer que h admet un unique point critique que l'on déterminera.
2) Montrer que h admet un minimum local en ce point.
3) Montrer que ce minimum est global.

Exercice 12

On propose d'étudier la fonction $f(x, y) = y - 4x^2 + 3xy - y^2$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.
2) Montrer que f admet un unique point critique que l'on déterminera.
3) Calculer les dérivées secondes de f. En déduire le Hessien de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4) Préciser la nature du point critique. Justifier.