Exercice : 6

1) On peut considérer que dans une zone de l'atmosphère terrestre d'environ 10 km d'épaisseur (0<z<10 km) la température décroit avec l'altitude selon une loi affine : $T=T_0(1-kz)$ et que le champ de pesanteur g reste constant.

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. l'indice zéro est relatif aux grandeurs au sol (z=0)

a-Exprimer la pression Pz en fonction de z, P_0, k et $\alpha = \frac{Mg}{kRT_0} > 1$, puis en fonction de T, T_0, P_0 et α

b-Exprimer la masse volumique de l'air ρ_z en fonction de P_0 et de ρ_0

2) Un aérostat est constitué par une enveloppe remplie d'hélium (dont le volume V ne peut dépasser la valeur maximale V_{max}) à laquelle est attachée une nacelle.

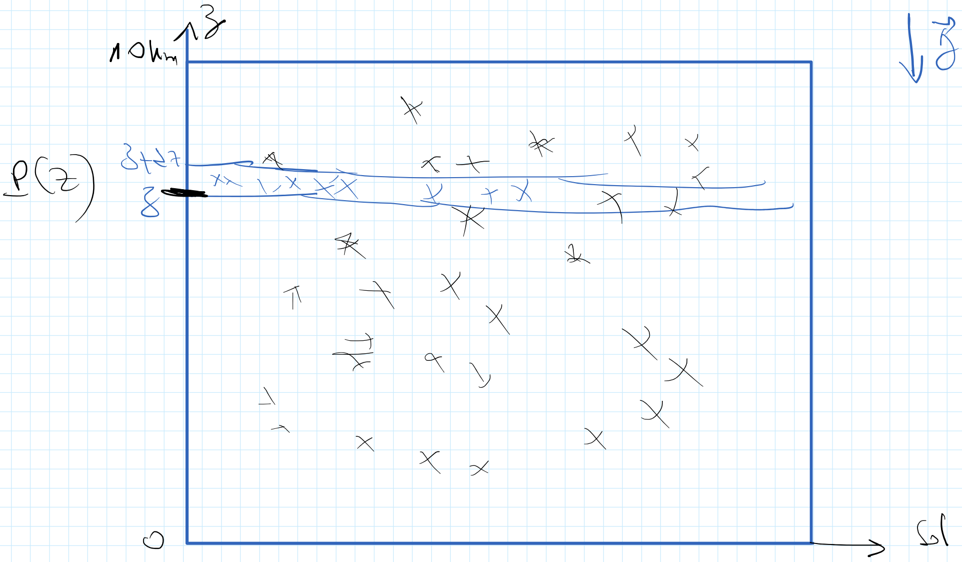
L'ensemble enveloppe nacelle, accessoires et passagers a une masse M_0. Il y a constamment communication entre l'air atmosphère et le gaz du ballon ce qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre les deux fluides.

a-Faire le bilan des forces appliquées à l'aérostat. Exprimer la force résultante $\vec{R}$, en fonction de $\vec{g}$, α, M_0, V, de la masse molaire M de l'air et celle M' de l'hélium, de la masse volumique ρ_0 de l'air et la pression P. A quelle condition, liant le volume V_0 et la masse M_0, le ballon pourra-t-il s'élever ?

b- Exprimer la force résultante résultante $\vec{R}$, en fonction de $\vec{g}$, α, M_0, V, M, M', ρ_{He}. Quels sont les termes de cette expression qui varient lorque l'altitude z augmente ?

Exprimer pourquoi l'ascension est la succession d'une phase à masse constante et d'une phase à volume constant.

c-Quelle est l'altitude d'équilibre, appelée plafond, de l'aérostat ?



$$\vec{\text{grad}}\, P = \rho \vec{g}$$

$$\frac{dP_z}{dz}\vec{e}_z = -\rho g \cdot \vec{e}_z$$

$$\boxed{\frac{dP_z}{dz} = -\rho g} \quad (1)$$

$$dP_z = -\frac{m}{V} g \cdot dz.$$

$$PV = nRT$$

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$= -\frac{m \cdot P}{nRT_z} g\, dz.$$

$$n = \frac{m}{M}$$

$$= -\frac{\cancel{n} M P}{\cancel{n} R T_z} g\, dz$$

$$m = n \cdot M$$

$$dP_z = -\frac{M P_z}{R \cdot T_0 (1 - kz)} g\, dz.$$

$$\int_{P_0}^{P_z} \frac{dP_z}{P_z} = -\int_0^z \frac{Mg}{RT_0} \frac{dz}{1-kz}$$

$$\ln\left(\frac{P_z}{P_0}\right) = \frac{1}{k} \frac{Mg}{RT_0} \cdot \int_0^z \frac{d(1-kz)}{(1-kz)}$$

$$\ln \frac{P_z}{P_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{Mg}{RT_0} \left(\ln(1-kz) - \ln(\underbrace{1-k \cdot 0}_{0}) \right)$$

$$\ln \frac{P_z}{P_0} = \frac{Mg}{k \cdot RT_0} \cdot \ln(1-kz) = \ln(1-kz)^{Mg/k \cdot RT_0}$$

$$\boxed{\frac{P_z}{P_0} = (1-kz)^{Mg/kRT_0}}$$

$$\boxed{P_z = P_0 \cdot (1-kz)^{Mg/kRT_0}}$$

b) $\rho(z) = \frac{m}{V(z)} = \frac{m}{nRT_z} P_z$

b) $\rho(z) = \frac{m}{V(z)} = \frac{m}{nRT_z} P_z$

$= \frac{M}{RT_0} \frac{P_0 \cdot (1-kz)^a}{(1-kz)}$

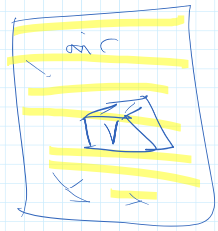
$\rho(z) = \frac{MP_0}{RT_0} \cdot (1-kz)^{a-1}$ $\qquad \rho_0 = \frac{m}{V_0}$

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \cdot (1-kz)^{a-1}}$$

$\rho_0 = \frac{m}{\frac{nRT_0}{P_0}} = \frac{MP_0}{RT_0}$

$\frac{P_z}{P_0} = (1-kz)^a \Rightarrow 1-kz = \left(\frac{P_z}{P_0}\right)^{1/a}$

$\rho(z) = \rho_0 \cdot \left(\frac{P_z}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{a}} = \rho_0 \left(\frac{P_z}{P_0}\right)^{\frac{a-1}{a}}$



* $\vec{P} = M_0 \vec{g}$: l'enveloppe nacelle, accessoire et passagers.

* $\vec{P}_{He} = \rho_{He} V \cdot \vec{g}$ $\qquad$ V : volume du Ballon.

* $\vec{\Pi} = -\rho_{air} V \vec{g}$: poussée d'Archimède.

$\vec{R} = \left(M_0 + (\rho_{He} - \rho_{air}) V\right) \vec{g}$

Soit V_m : le volume molaire dans les conditions de T et pression.

Les deux gaz se trouvent dans les mêmes conditions.

$$\rho_{He} = \frac{M'}{V_m} \quad \text{et} \quad \rho_{air} = \frac{M}{V_m} \Rightarrow \rho_{He} = \rho_{air}\,\frac{M'}{M}$$

$$\vec{R} = \left(M_0 + \rho_{air} V \left(\frac{M'}{M} - 1\right)\right)\vec{g}$$

lorsque le ballon est sur le sol on a : $P = P_0$

$\rho_{air} = \rho_{0\,air}$ et l'enveloppe occupe un volume V_0.

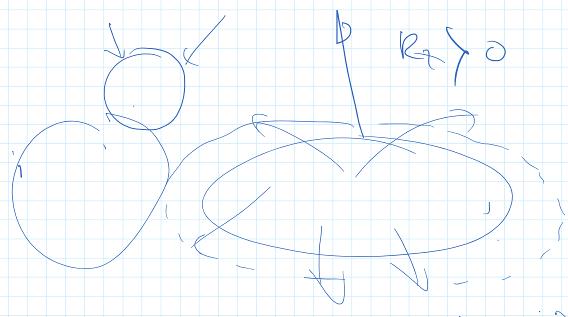
$$\vec{R} = -\left(M_0 + \rho_{air} V_0 \left(\frac{M'}{M} - 1\right)\right) g \cdot \vec{e}_z.$$

$$\|\vec{R} = R_z \cdot \vec{e}_z\|$$

l'aerostat s'élève du sol si $R_z > 0$.

$$M_0 + \rho_{air} V_0 \left(\frac{M'}{M} - 1\right) < 0$$

$$\boxed{M_0 < \rho_{air} V_0 \cdot \left(\frac{M'}{M} - 1\right)}$$



$\rho_{He} = \frac{m}{V \nearrow}$

b) * lorsque $z \nearrow$, ρ_{He} diminue et $V \nearrow$ de telle manière de compenser cet effet.

* $\underline{\underline{R_z > 0}}$ l'ensemble est animé d'un mvm rectiligne uniformément accéléré.

* lorsque $V \to V_{max}$, la masse volumique ρ_{He} diminue.

$\|\vec{R}\| \searrow$

c) à un certain hauteur hauteur : $z = z_{max}$, $V = V_{max}$

$\vec{R} = \vec{0}$. d'où :

$\vec{P}$

(C.T)

$$M_0 = \rho_{He} V_{max} \left(\frac{M}{M'} - 1\right) = \rho_{air}(z) V_{max} \frac{M'}{M} \left(\frac{M}{M'} - 1\right)$$

$$M_0 = \rho_0 \cdot (1 - k z_{max})^{a-1} V_{max} \frac{M'}{M} \left(\frac{M}{M'} - 1\right)$$

$$(1 - k z_{max})^{a-1} = \frac{M M_0}{M - M'} \frac{1}{\rho_0 V_{max}} \qquad \rho_0 = \frac{P_0 M}{R T_0}$$

$$1 - k z_{max} = \left(\frac{M M_0}{M - M'} \cdot \frac{1}{\rho_0 V_{max}}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$\boxed{z_{max} = \frac{1}{k} \left[1 - \left(\frac{M M_0}{M - M'} \cdot \frac{1}{\rho_0 V_{max}}\right)^{1/(a-1)}\right]}$$