

1 - FONCTION D'ÉTAT

La quantité de chaleur élémentaire échangée par une mole de gaz avec le milieu extérieur est donnée, en fonction des variables indépendantes pression p et température T , par l'équation

$$\delta Q = -\frac{RT}{p} dp + c_p(T) dT$$

où $c_p(T)$ représente la capacité calorifique molaire du gaz, fonction de la température seule.

La quantité de chaleur échangée est-elle une fonction d'état ?

$$\delta Q = -\frac{A(T,p)}{p} dp + \frac{B(T,p)}{p} dT \quad (1)$$

$$\delta Q \text{ D.T.E.} : \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_T$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{RT}{p} \right) \right|_p = \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_T$$

$$-\frac{R}{p} = 0 \quad \left(-\frac{R}{p} \neq 0 \right)$$

la condition (1) n'est pas vérifiée: δQ n'est pas une D.T.E.

δQ : dépend du chemin suivi.

3 - COMPRESSION ADIABATIQUE D'UN GAZ PARFAIT

Un récipient, fermé par un piston mobile, renferme 2 g d'hélium (gaz parfait, monoatomique) dans les conditions (p_1, v_1) . On opère une compression adiabatique, de façon réversible, qui amène le gaz dans les conditions (p_2, v_2) . On donne $p_1 = 1 \text{ atm}$, $v_1 = 10 \text{ l}$, $p_2 = 3 \text{ atm}$.

Déterminer :

- le volume final v_2 ;
- le travail reçu par le gaz ;
- la variation d'énergie interne du gaz.
- En déduire l'élévation de température du gaz, sans calculer la température initiale T_1 .

1)

$$(p_1, v_1) \xrightarrow[\text{r.v.}]{\text{adib.}} (p_2, v_2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \\ (R = 8.3 \text{ J/K})$$

$$p_1 v_1^\alpha = p_2 v_2^\alpha \Rightarrow v_2 = v_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\alpha}$$

Av:

$$v_2 = 5.16 \text{ l.}$$

AN:

$$V_1 = 1.16 \text{ l.}$$

b)

$$W = - \int p dV = - \int \frac{A}{V^\gamma} dV$$

$$(pV^\gamma = A = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma)$$

$$= - A \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = - A \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= - \frac{A}{1-\gamma} \left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right) = - \frac{1}{1-\gamma} \left(A V_2^{1-\gamma} - A V_1^{1-\gamma} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} \left(p_2 V_2^\gamma \cdot V_2^{1-\gamma} - p_1 V_1^\gamma \cdot V_1^{1-\gamma} \right)$$

$$W = \frac{1}{\gamma-1} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma-1}$$

AN:

$$W = 822 \text{ J.}$$

c) l'image interne: 1^{er} Principe:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q = W \quad (Q=0)$$

AN:

$$\Delta U = 822 \text{ J.}$$

d)

$$\Delta U = W = n c_v \Delta T.$$

c_v : capacité calorifique molaire

$$c_v = \frac{R}{\gamma-1}$$

$$\Delta U = n \frac{R}{\gamma-1} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\gamma-1}{nR} \Delta U.$$

$$n = \frac{m}{M_{\text{m}}} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \text{ mol.}$$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = 132 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Une mole de gaz reçoit, au cours d'une transformation élémentaire réversible, une quantité de chaleur δQ qui peut s'exprimer de trois façons différentes, suivant le choix des variables (pression p , volume v , température T) :

$$\begin{aligned}\delta Q &= c_v dT + l dv, \\ \delta Q &= c_p dT + h dp, \\ \delta Q &= \lambda dp + \mu dv.\end{aligned}$$

1° Exprimer les coefficients calorimétriques l , h , μ et λ en fonction des capacités calorifiques molaires c_p et c_v et des dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \text{ et } \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v.$$

2° Calculer, dans le cas d'un gaz parfait, l , h , λ et μ en fonction des paramètres p et v et du rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

3° En déduire la relation entre p et v , au cours d'une transformation adiabatique réversible du gaz,

a) si γ est indépendant de la température ($\gamma = \gamma_0$) ;

b) si γ est une fonction linéaire de la température ($\gamma = \alpha T + \gamma_0$).

$$\delta Q = c_v dT + l dv = c_p dT + h dp.$$

1° $p = \text{cte}$:

$$c_v dT + l dv = c_p dT \quad (dv = 0)$$

$$l = (c_p - c_v) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p.$$

1° $v = \text{cte}$:

$$c_p dT = \mu dv$$

$$\mu = c_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p$$

1° $v = \text{cte}$:

$$c_v dT = \lambda dp + h dp.$$

$$h = - (c_p - c_v) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v$$

$$\lambda = c_v \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v$$

2. pour un gaz :

$$pV = RT. \quad / \quad c_p - c_v = R \quad / \quad c_p = \frac{\alpha R}{\alpha - 1} \quad / \quad c_v = \frac{R}{\alpha - 1}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p = \frac{p}{R} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v = \frac{v}{R}.$$

$$l = \frac{R}{\alpha - 1} \cdot \frac{p}{R} = \frac{p}{\alpha - 1}.$$

$$h = - \frac{R}{\alpha - 1} \cdot \frac{v}{R} = - \frac{v}{\alpha - 1}.$$

$$\mu = \frac{\alpha R}{\alpha - 1} \cdot \frac{p}{R} \Rightarrow \mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot p.$$

$$\lambda = \frac{\cancel{K}}{\gamma-1} \frac{V}{\cancel{K}} = \frac{V}{\gamma-1}$$

3) lors d'une transformation adiabatique: $\delta q = 0$.

$$\delta q = \lambda dp + p dv = 0.$$

$$\div p \quad \frac{V dp}{\cancel{\gamma-1}} + \frac{\cancel{\gamma-1} p dv}{\cancel{\gamma-1}} = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \cdot \frac{dv}{V} = 0.$$

a) $\gamma = \gamma_0 = \gamma_0$

$$\int \frac{dp}{p} + \gamma \int \frac{dv}{V} = c_1$$

$$\ln p + \gamma \ln V = C$$

$$\ln (p \cdot V^\gamma) = C.$$

$$p V^\gamma = e^C = c_2$$

$$p V^\gamma = c_2$$

b) $\gamma = \gamma(T) = \gamma_0$

$$\frac{dp}{p} + (\gamma(T) + \delta_0) \frac{dv}{V} = 0. \quad (i)$$

$$p \cdot V = R \cdot T$$

$$d(p \cdot V) = d(R \cdot T)$$

$$V dp + p \cdot dV = R \cdot dT.$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{R}{pV} dT$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \quad (ii)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dv}{v} \quad (ii)$$

$$(ii) \text{ ds (i) : } \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} \quad (iii)$$

(i)

$$\frac{dT}{T} + \gamma \cdot T \cdot \frac{dv}{v} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dT}{T} + \cancel{\gamma \cdot T} \cdot \left(- \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} \right) + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

par intégration :

$$\ln T - \ln(\gamma T - 1) + (\gamma - 1) \ln v = \text{cte}$$

$$\ln \frac{T}{\gamma T - 1} + (\gamma - 1) \ln v = \text{cte}$$

$$\frac{T \cdot v^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} = \text{cte} \rightarrow T v^{\gamma - 1} = \text{cte}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma = \text{cte} \end{cases}$$

15 - TRANSFORMATION POLYTRAPIQUE : CHALEUR, TRAVAIL, DIAGRAMME (W, Q)

Une mole de gaz parfait (défini par les variables indépendantes : pression p et volume v) subit une transformation réversible au cours de laquelle le travail W et la quantité de chaleur Q reçus par le gaz sont liés par la relation $W = kQ$; cette relation est vérifiée au cours de chaque transformation élémentaire.

1° Montrer que le produit $p v^n$ est constant au cours de la transformation : on exprimera n en fonction de k et du rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ du gaz (c_p et c_v = capacités calorifiques molaires du gaz).

2° Exprimer la chaleur molaire C du gaz parfait, en fonction de c_v et k , puis en fonction de c_v , n et γ .

Thermodynamique

b) Donner les valeurs de C dans les quatre cas suivants :

- transformation isotherme,
- transformation adiabatique,
- transformation isochore,
- transformation isobare.

3°

a) Calculer en fonction de $k, \gamma, p_1, v_1, p_2, v_2$ le travail W reçu par le gaz, de la part du milieu extérieur au cours d'une transformation réversible qui fait passer le gaz de l'état $\begin{cases} p_1 \\ v_1 \end{cases}$ à l'état $\begin{cases} p_2 \\ v_2 \end{cases}$.

b) Comparer ce travail avec le travail W_i reçu par le gaz, si la transformation précédente était effectuée par voie irréversible.

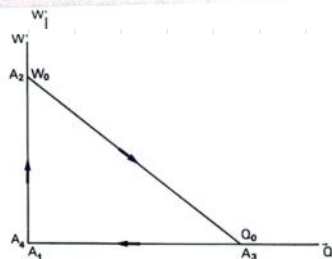


Figure III, 9

4°

a) Le gaz subit la transformation $A_1 \begin{cases} p_1 \\ v_1 \\ T_1 \end{cases} \rightarrow A_2 \begin{cases} p_2 \\ v_2 \\ T_2 \end{cases} \rightarrow A_3 \begin{cases} p_3 \\ v_3 \\ T_3 \end{cases} \rightarrow A_4 \begin{cases} p_4 \\ v_4 \\ T_4 \end{cases}$ représentée ci-dessus sur le diagramme (Q, W) .

Déterminer les paramètres thermodynamiques, en fonction de p_1, v_1, T_1 , dans les états A_2, A_3, A_4 . On donne $Q_0 = W_0 = p_1 v_1$.

b) Tracer le diagramme des transformations subies par le gaz dans la représentation de Clapeyron (p, v) .

Application numérique : $p_1 = 1 \text{ atm}$; $T_1 = 300 \text{ K}$; $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $\gamma = 1,40$.

$$\Rightarrow W = k p v$$

$$\delta W = k \cdot \delta p v$$

$$-p \delta v = \delta W = k (\lambda \delta p + \mu \delta v)$$

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{par m. G.P.}$$

$$\text{on a d'écrit: } \left(-p \delta v = k \cdot \frac{\partial}{\partial p} \delta p + k \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta v \right) \times (\gamma-1)$$

$$p \delta v \{ k \gamma + (\gamma-1) \} + k \cdot v \cdot \delta p = 0$$

$$\div p \cdot v : \quad \frac{dv}{v} \left\{ \frac{k \gamma + (\gamma-1)}{k} \right\} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\text{on pose: } n = \frac{k \gamma + (\gamma-1)}{k} = \gamma + \frac{\gamma-1}{k}$$

$$\frac{dp}{p} + n \cdot \frac{dv}{v} = 0$$

$$\ln P + n \cdot \ln V = \text{cte}$$

$$P \cdot V^n = \text{cte.}$$

2.a) $C = \frac{\delta Q}{dT}$: la chaleur molaire du gaz.

$$(V = V(T)) \quad dU = C_V \cdot dT = \overbrace{\delta W + \delta Q} = (1+k) \delta Q.$$

$$\| C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{C_V}{k+1} \| \quad \delta Q = \frac{C_V}{k+1} dT$$

$$k = \frac{\gamma-1}{n-\gamma}$$

$$\| C = \frac{C_V}{\frac{\gamma-1}{n-\gamma} + 1} \| = C_V \cdot \frac{n-\gamma}{n-1}$$

b) isotherme : $T = \text{cte.}$

$$dU = \delta Q (k+1) = 0$$

$$k = -1$$

$$C = \infty.$$

a diabatique : $dU = \delta Q (k+1) = 0 \Rightarrow \delta Q = 0$

$$k \rightarrow \infty.$$

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = 0.$$

isochore : $V = \text{cte.}$

$$\delta W = 0 = k \cdot \delta Q.$$

$$\rightarrow k = 0.$$

$$C = c_v$$

isobore $p = \text{cte}$:

$$-p \cdot \delta v = k p \delta v = \frac{k \delta \cdot p}{\delta - 1}$$

$$k = \frac{1 - \delta}{\delta}$$

$$C = \delta c_v = c_p //$$

3) a)

$$dU = c_v \cdot dT = \delta W + \delta p = \delta W + \frac{1}{k} \delta W$$

$$dU = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \delta W = \frac{k+1}{k} \cdot \delta W = c_v \cdot dT.$$

$$\delta W = \frac{k c_v}{k+1} \cdot dT.$$

$$\delta W = \frac{k c_v}{k+1} \cdot \frac{d(p \cdot v)}{k}$$

$$W = \frac{k}{k+1} \frac{c_v}{k} \cdot \int_{(1)}^{(2)} d(p \cdot v)$$

$$W = \frac{k}{k+1} \frac{c_v}{k} \cdot (p_2 v_2 - p_1 v_1)$$

b)

irréversible:

$$dU = \delta W \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

ne dépend de chemin
initial

reversible et irréversible et grand ressort de m travail.

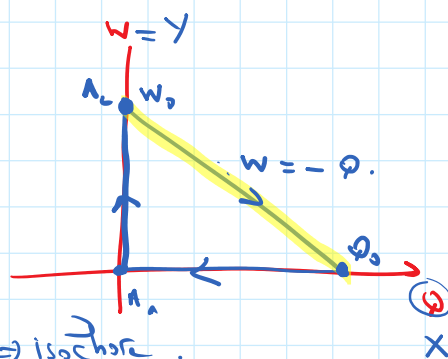
4.a. $A_1 A_2$: adiabatique ($\varphi = 0$)

$A_2 A_3$: isotherme:

$$DQ = W + \varphi = 0 = c_v \Delta T$$

$$\Delta T = 0$$

$A_3 A_4$: $W = 0 \Rightarrow (T = \text{cte}) \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow$ isochore.



$A_1 A_2$: adiabatique :

$$W_2 = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = p_1 V_1$$

$$p_2 V_2 = \gamma p_1 V_1 \quad \text{ou} \quad T_2 = \gamma T_1$$

$$T_2 = \gamma T_1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \gamma$$

de plus :

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

$$V_2 = V_1 \cdot \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$p_2 = \frac{\gamma p_1 V_1}{V_2}$$

$$p_2 = p_1 \left(\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right)$$

* $A_2 A_3$:

$$T_2 = T_3$$

$$W_{\text{isoth}} = R T_2 \ln \left(\frac{p_2}{p_3} \right) = R T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = p_1 V_1 = R T_1 = \frac{R T_2}{\gamma}$$

$$V_3 = V_2 \cdot e^{\frac{1}{\gamma}}$$

d'où :

$$V_3 = V_1 \cdot \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot e^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p_3 = p_2 \cdot e^{-11\gamma}$$

$$p_3 = p_1 \cdot \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot e^{-11\gamma}$$

* A_3, A_4 isochore.

$$V_3 = V_4$$

$$\Delta U_{\text{Sch}} = 0 = w + q = c_v \cdot (T_4 - T_1)$$

$$T_4 = T_1$$

$$p_4 = \frac{RT_1}{V_3} = p_1 \cdot \gamma^{-\frac{1}{1-\gamma}} \cdot e^{-11\gamma}$$

16 – TRANSFORMATION EN VASE CLOS D'UN SYSTEME NON ISOLE

Un cylindre horizontal, clos, de volume invariable, est divisé en deux compartiments, par un piston mobile, sans frottement. Les parois du cylindre et le piston sont imperméables à la chaleur. A l'état initial, les deux compartiments C_1 et C_2 contiennent un même volume $v_0 = 2 \text{ l}$ d'hélium (gaz parfait), à la pression $p_0 = 1$ atmosphère, et à la température $T_0 = 273 \text{ K}$.

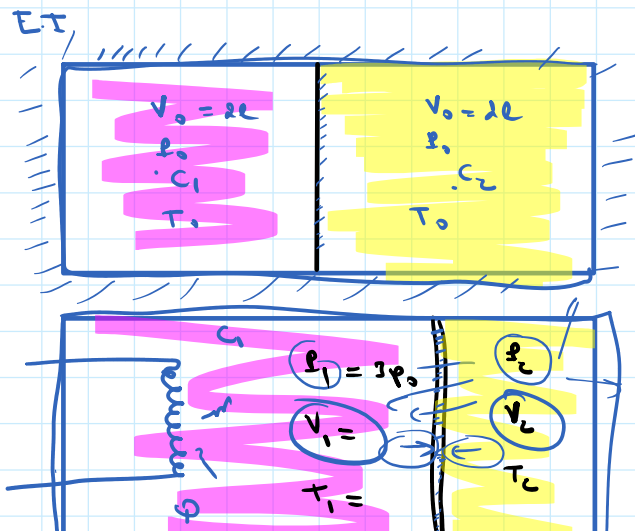
Le rapport des chaleurs massiques à pression et volume constants est $\gamma = \frac{5}{3}$.

Le gaz du compartiment C_1 reçoit, à l'aide d'une résistance chauffante, de la chaleur du milieu extérieur.

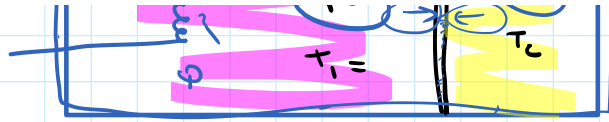
Déterminer :

1° les pressions, volumes et températures des compartiments C_1 et C_2 , lorsque la pression du gaz contenu dans C_1 devient $p_1 = 3 p_0$.

2° la variation d'énergie interne du gaz dans C_1 et C_2 , et l'énergie fournie par la résistance chauffante.



$$\begin{aligned} V_T &= V_1 + V_2 \\ &= 2v_0 \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$



à l'équilibre mécanique $p_1 = p_2 = 3 p_0 = 3 \text{ atm.}$

C_2 : compression adiabatique: (mtc) \Rightarrow réversible:

$$V_2 = V_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{1/\gamma} \quad \frac{p_2}{p_0} = 3.$$

$$V_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-1/\gamma}$$

$$\| V_2 = 1.07 \cdot 2 \cdot \|$$

$$2V_0 = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 = 2V_0 - V_2$$

$$\| V_1 = 2.97 \cdot 2 \cdot \|$$

$$\times T_2: \quad T_2 = T_0 \cdot \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$T_2 = 273 \times 3^{2/\gamma} = 423 \text{ K.}$$

$$\times T_1:$$

2.)

ΔU : la variation d'énergie interne par n mols: de C_1 :

$$\Delta U_1 = C_{V,1}(T_1 - T_0) \text{ ou } \Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$$

$C_{V,1}$: Capacité calorifique à volume constant.

$$\Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma-1} \left\{ \frac{p_1 V_1}{nR} - \frac{p_0 V_0}{nR} \right\}$$

$$\Delta U_1 = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \{ p_1 v_1 - p_2 v_2 \} = \underline{\underline{1240 \text{ kJ}}}$$

$$\Delta U_2 = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{\gamma-1} = \underline{\underline{164 \text{ kJ}}}$$

$$\Sigma = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \underline{\underline{1204 \text{ kJ}}}$$

19 - DETENTE ISENTHALPIQUE DE JOULE-THOMSON

Un gaz s'écoule lentement dans un tuyau cylindrique, en traversant un obstacle poreux. En régime permanent, les pressions, températures et volumes molaires du gaz, sont :

- p_1, v_1, T_1 en amont de l'obstacle,
- p_2, v_2, T_2 en aval de l'obstacle.

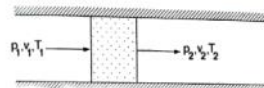


Figure III, 15

Les parois du tuyau sont parfaitement calorifugées.

a) Montrer que l'enthalpie $H = U + pv$ (où U est l'énergie interne molaire) est la même en amont et en aval.

b) Montrer qu'une variation de pression dp s'accompagne d'une variation de température dT telle que

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v}{c_p}$$

où c_p est la capacité calorifique molaire à pression constante.

On rappelle que dans une transformation où la pression varie de dp et la température de dT , la quantité de chaleur mise en jeu est

$$\delta Q = c_p dT + h dp, \quad \text{avec} \quad h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Que vaut $\frac{dT}{dp}$ pour un gaz parfait ?