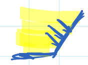
* statique des fluides : Etude des fluides au repos. (gaz + liquide).

* Calculer la pression en tout point d'un fluide.

* Calculer les forces appliquées par un fluide sur un solide indéformable. (Barrage)



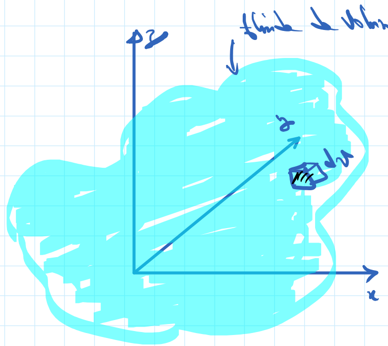
1) Force de pression :

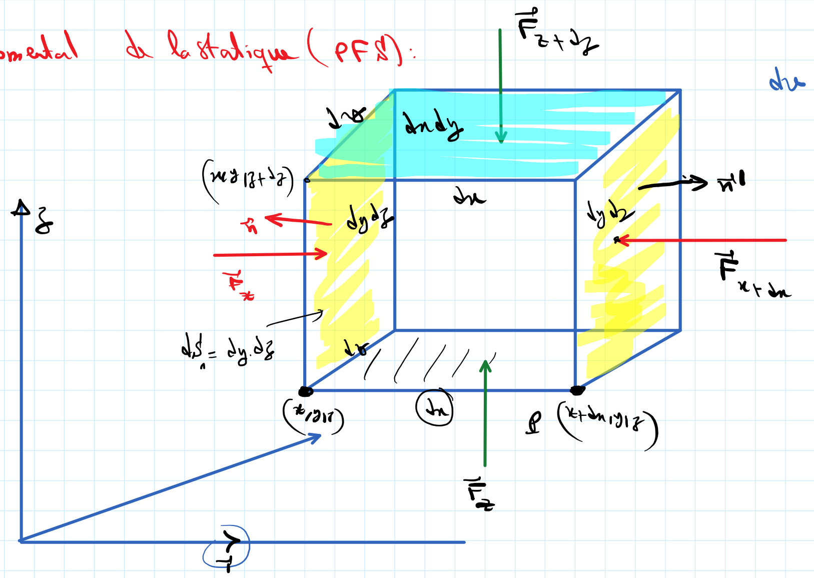
$$P(M) = \frac{\delta F(M)}{\delta S}$$

$$\vec{F} = - \iint P(M) \cdot ds \cdot \vec{n} = - \iint P(M)\, d\vec{S} \qquad d\vec{S} = ds \cdot \vec{n}$$

2) Principe fondamental de la statique (PFS) :

$\vec{g} = -g\vec{k}$ $\qquad dv = dx\,dy\,dz$





$$\vec{R}_x = \vec{F}_x + \vec{F}_{x+dx} = P(x,y,z) \cdot dy\,dz\,\vec{i} - P(x+dx,y,z)\,dy\,dz\,\vec{i}$$

$$P(x+dx,y,z) = P(x,y,z) + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx = P(x+dx,y,z) - P(x,y,z)$$

forces de pression $\vec{R}$
$$\begin{cases} \vec{R}_x = - \dfrac{\partial P}{\partial x} \cdot dx\,dy\,dz\,\vec{i} = - \dfrac{\partial P}{\partial x} \cdot dv \cdot \vec{i} \\ \vec{R}_y = - \dfrac{\partial P}{\partial y} \cdot dv\,\vec{j} \\ \vec{R}_z = - \dfrac{\partial P}{\partial z}\, dv\,\vec{k} \end{cases}$$

force de poids : $\vec{P} = m_{dv} \cdot \vec{g} = - \rho(x,y,z)\, dv \cdot g\,\vec{k}$

• fluide au repos : "$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$"

① $-\frac{\partial p}{\partial x}\, d\tau\, \vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\, d\tau\, \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\, d\tau\, \vec{k} - \rho\, d\tau\, g\, \vec{k} = \vec{0}$

$$\begin{cases} ①\cdot\vec{i} & \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ ①\cdot\vec{j} & \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ ①\cdot\vec{k} & \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}}$$

Relation fondamentale de l'hydrostatique.

Si la $p = p(z)$ et $\rho = cte$:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$dp = -\rho g\, dz$$

$$p(z) = -\rho g z + p_0$$

$$p(z) - p_0 = -\rho g z$$

A : $p_A - p_0 = -\rho g z_A$

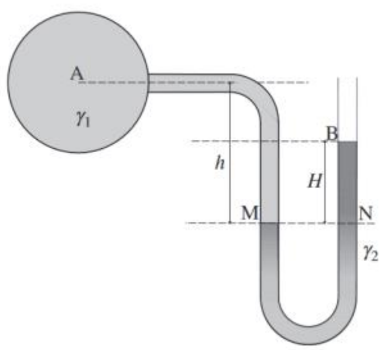
B : $p_B - p_0 = -\rho g z_B$

$$p_B - p_A = -\rho g (z_B - z_A)$$

$\gamma = \rho g$: poids spécifique du fluide

$$\| \; p_B - p_A = -\gamma\, h \; \|$$

A, B : même fluide.



M ∈ fluide 1 et fluide 2.

* $z_M = z_N$: $p_M = p_N$ (1)

* $p_M = p_A + \gamma_1 h$ (2)

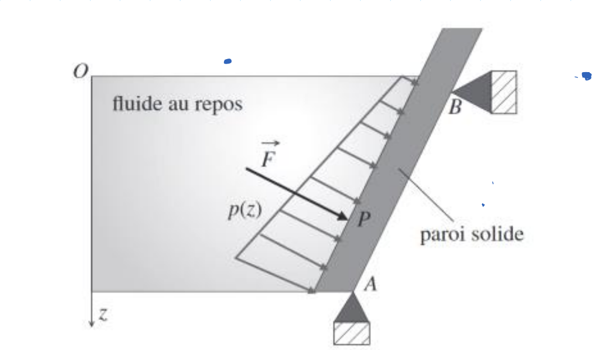
* $p_N = p_B + \gamma_2 H$ (3)

$p_N = p_A + \gamma_1 h$

$$P_B + \gamma_2 H = P_a + \gamma_1 h$$

$$P_A = P_B + \gamma_2 H - \gamma_1 h$$

* Efforts exercées sur une surface indéformable.



$$\vec{F} = \iint p(z)\,\vec{n}\,ds$$

le moment de la résultante : (Théorème du moment)

$$\vec{OP} \wedge \vec{F} = \iint_S \vec{OM} \wedge p\,\vec{n}\,ds$$

$\Rightarrow$ la condition d'équilibre.

2.3 Pression dans des réservoirs

En utilisant les données reportées sur la figure ci-dessous, calculer la différence de pression entre les deux réservoirs.

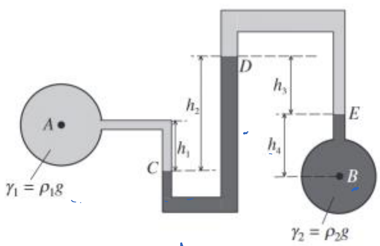


Figure 2.12 - h_1 = 2 cm, h_2 = 8 cm, h_3 = 5 cm, h_4 = 1 cm, ρ_1 = 1,225 kg·m^{-3}, ρ_2 = 1 000 kg·m^{-3}, g = 9,81 m·s^{-2}.

$P_A - P_C = -\gamma_1 h_1$. $h_1 = z_A - z_C$

$P_C - P_D = +\gamma_2 h_2$. $h_2 = z_D - z_C$

$P_D - P_E = -\gamma_1 h_3$. $h_3 = z_D - z_E$

$P_E - P_B = -\gamma_2 h_4$. $h_4 = z_E - z_B$.

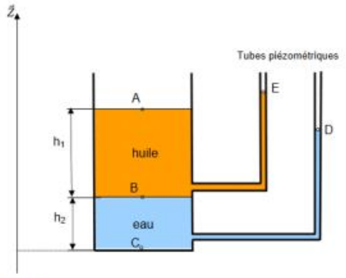
$$P_A - P_B = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_3 - \gamma_2 h_4$$

$$\| P_A - P_B = \gamma_1(-h_1 - h_3) + \gamma_2(h_2 - h_4) \|$$

1 ***ENONCE***

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique ρ_1=850 kg/m^3 sur une hauteur h_1=6 m,
- de l'eau de masse volumique ρ_1=1000 kg/m^3 sur une hauteur h_2=5 m.



On désigne par:

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézimétriques,
- $(O, \vec{Z})$ est un axe vertical tel que Z_C=O.

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points:

1) B et A. En déduire la pression P_B (en bar) au point B.

2) A et E. En déduire le niveau de l'huile Z_E dans le tube piézométrique.

3) C et B. P_C ?!

4) C et D, z_D ?!

1) RFH: entre A et B:

$$P_B - P_A = \rho_1 g \cdot (z_A - z_B) \qquad P_A = P_{atm} \qquad z_A - z_B = h_1$$

$$\| \; P_B = \rho_1 g h_1 + P_{atm} = 1{,}5 \text{ bar.}$$

2)

$$P_A - P_E = \rho_1 g \cdot (z_E - z_A) \qquad P_A = P_E = P_{atm}$$

$$\| \; P_A = P_E = P_{atm}$$

$$\| \; z_E = z_A \; \| \qquad z_E = h_2 + h_1$$

3)

$$P_C - P_B = \rho_2 g \, (\overbrace{z_B - z_C}^{h_2})$$

$$P_C = 2 \text{ bar.}$$

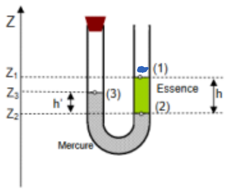
4)

$$P_C - P_D = \rho_2 g (z_D - z_C) \qquad P_D = P_{atm}$$

$$\| \; z_D = \frac{P_C - P_D}{\rho_2 g} + z_C \; \| \qquad \| \; z_C = 0 \; \|$$

1 ***ENONCE***

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{essence}$=700 kg/m^3.
- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{mercure}$=13600 kg/m^3.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est P_1=P_{atm}=1 bar.

L'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s^2.

1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression P_2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que h= (Z_1-Z_2)= 728 mm.

2) De même, pour le mercure, calculer la pression P_3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que h'= (Z_3-Z_2)= 15 mm.

1)

$$P_2 - P_1 = \rho_{essence} \cdot g (z_1 - z_2)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_{ess} \cdot g \, h. \qquad P_1 = P_{atm}.$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho_{ess} g h.$$

AN : $P_2 = 1050$ mbar.

2)

$$P_2 - P_3 = \rho_{mercure} \cdot g (z_3 - z_2)$$

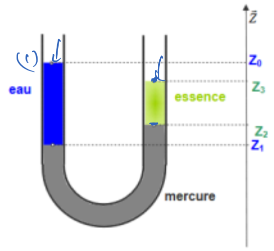
$$P_3 = P_2 + \rho_{merc} \, g \, h$$

4 4

$$\| \; P_3 = 1070 \text{ mbar.} \; \|$$

1 ENONCE

On considère un tube en U contenant trois liquides:



- de l'eau ayant une masse volumique $\rho_1 = 1000$ kg/m^3,
- du mercure ayant une masse volumique $\rho_2 = 13600$ kg/m^3,
- de l'essence ayant une masse volumique $\rho_3 = 700$ kg/m^3.

On donne :

$Z_0 - Z_1 = 0{,}2$ m (1)

$Z_3 - Z_2 = 0{,}1$ m (2)

$Z_1 + Z_2 = 1{,}0$ m (3)

On demande de calculer Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3.

RFH : entre (0) et (1) :

$P_0 = P_3 = P_{atm}$

$\cancel{P_1} - \cancel{P_0} = \rho_1 g (z_0 - z_1)$

$\cancel{P_2} - \cancel{P_1} = \rho_2 g (z_1 - z_2)$

$\cancel{P_3} - \cancel{P_2} = \rho_3 g (z_2 - z_3)$

$\rho_1 (z_0 - z_1) + \rho_2 (z_1 - z_2) + \rho_3 (z_2 - z_3) = 0$

$z_2 - z_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(z_0 - z_1) - \frac{\rho_3}{\rho_1}(z_3 - z_2)$

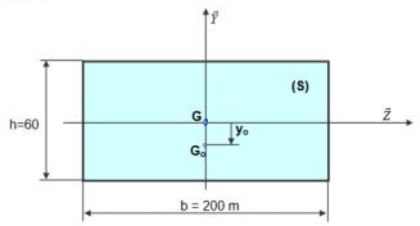
$\begin{cases} z_2 - z_1 = 0.0096 \text{ m.} \\ z_1 + z_2 = 1 \text{ m} \end{cases}$

$z_1 = 0{,}4952$ m.

$z_2 = 0.5041$ m

$\rightarrow z_2$ et z_3.

1 ENONCE



La figure ci-dessus représente un barrage ayant les dimensions suivantes : longueur b=200 m, hauteur h=60 m

Le barrage est soumis aux actions de pression de l'eau.

Le poids volumique de l'eau est : $\varpi = 9{,}81.10^3 \ N/m^3$.

On demande de :

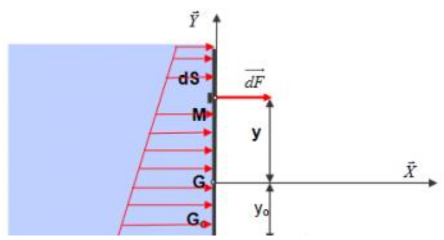
1) Calculer l'intensité de la résultante $\|\vec{R}\|$ des actions de pression de l'eau.

2) Calculer la position y_0 du centre de poussée G_0.

1) $\|\vec{R}\| = P_G . S$ ✓

$P_G = P_A + \rho g (z_A - z_G)$

$\begin{cases} P_G = P_A + \rho g . \frac{h}{2} \\ S = b . h . \end{cases}$



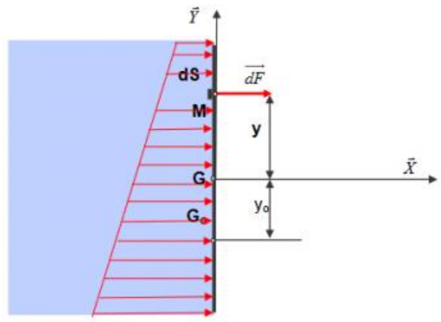
$P_M - P_G = \rho g (Y_G - Y_M)$

$Y_G = 0.$

$Y_M = y.$

$P_M - P_G = -\rho g y.$

$P_M = P_G - \rho g y.$



$y_M = y$.

$p_M - p_G = -\rho g\, y$.

$p_M = p_G - \rho g\, y$.

en M. $\vec{dF} = p_M . dS\, \vec{x}$. $\vec{n} = -\vec{x}$

$\vec{dF} = (p_G - \rho g . y)\, dS\, \vec{x}$.

$\vec{R} = \int_{(S)} \vec{dF}$

$\vec{R} = \int_{(S)} (p_G - \rho g . y)\, dS\, \vec{x}$. $\int_{(S)} dS = S$

$\vec{R} = \int_{(S)} p_G . dS\, \vec{x} - \rho g \int_{S} y\, dS$

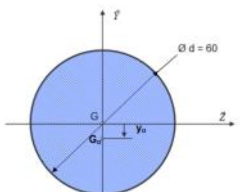
$y_G . dS = \int y\, dS = 0$

$\vec{R} = \int p_G . dS\, \vec{x} = p_G . \iint dS\, \vec{x}$

$\| \vec{R} = p_G\, S\, \vec{x} . \|$ ✓

1 **ENONCE**

Un piston de vérin a un diamètre d=60 mm. Il règne au centre de surface G du piston une pression de 40 bar, soit environ P_G=4 MPa.



L'huile contenue dans le vérin a un poids volumique $\varpi = 9{,}81 . 0{,}8 . 10^3\ N/m^3$.

On demande de :

1) Calculer l'intensité de la résultante $\|\vec{R}\|$ des actions de pression de l'huile.

2) Calculer la position y_0 du centre de poussée G_0.

1) $\|\vec{R}\| = p_G . S$ A.N.

$S = \pi . R^2 = \pi . \frac{d^2}{4}$

$\| \|\vec{R}\| = 11.3 . 10^3\ N . \|$

Ex. 4 Récipients de sections différentes

Deux récipients A et B de sections constantes respectives $S_A = 40\ \text{cm}^2$ et $S_B = 10\ \text{cm}^2$ communiquent à leur base par un tube fin. Ils contiennent initialement un volume d'eau suffisant pour que, au cours des expériences suivantes, il y ait toujours de l'eau dans chacun des deux récipients.

1) On verse un volume $V = 0{,}02\ \text{L}$ d'huile dans le récipient A. Déterminer la dénivellation entre les deux surfaces libres.

2) Quelle serait cette dénivellation si on avait versé l'huile dans le récipient B ?

Données :

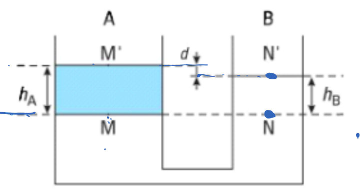
Masses volumiques :

– de l'eau $\rho_e = 1\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$;

– de l'huile $\rho_h = 0{,}9\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

$P_{M'} = P_{N'} = P_0$

$P_M = P_N$



• $V = h_A \cdot S_A \Rightarrow h_A = \frac{V}{S} = \frac{20}{40} = 5\ \text{cm}.$

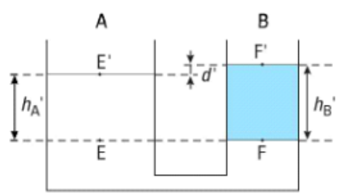
• $P_{M'} = P_{N'} = P_0$ ✓ $\qquad P_M - P_{M'} = \rho_h \cdot g\, h_A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

• $P_M = P_N \quad (h = 0) \qquad P_N - P_{N'} = \rho_e\, g\, h_B$

$h_B = \frac{\rho_h}{\rho_e} h_A = \frac{0.9}{1} \cdot 5 = 4.5\ \text{cm}.$

$\| d = h_A - h_B = 0.5\ \text{cm} \|$



$\boxed{d = 2\text{cm}}$