Exercice 3 **Cycle thermodynamique**

On étudie dans ce problème le cycle thermodynamique d'une machine motrice ditherme qui fonctionne au contact de deux thermostats dont les températures sont respectivement notées T_{froid} pour le thermostat le plus froid (noté Σ_F) et T_{chaud} pour le thermostat le plus chaud (noté Σ_C). Le système que l'on considère au cours du cycle est une masse m d'air assimilable à un gaz parfait dont le rapport de capacités thermiques est noté γ.

On note W la quantité d'énergie échangée sous forme de travail avec le milieu extérieur par le système au cours d'un cycle. Q_{froid} et Q_{chaud} sont respectivement les quantités d'énergie échangées sous forme de chaleur par le système avec Σ_F et Σ_C au cours d'un cycle. Données :

- Masse d'air décrivant le cycle : $m = 1$ kg.
- Rapport de capacités thermiques de l'air: $\gamma = 1,4$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,32\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire de l'air: $M_{\text{air}} = 29\ \mathrm{g\ mol^{-1}}$.
- Température de la source froide (atmosphère) : $T_{\text{froid}} = 290$ K.
- Température de la source chaude : $T_{\text{chaud}} = 950$ K.
- Pression basse : $P_0 = 10^5$ Pa.
- Pression haute : $P_1 = 10^6$ Pa.

⚠ Dans la suite: exprimer en fonction des données signifie : donner une réponse littérale en fonction de m, γ, R, M_{air} , T_{froid} , T_{chaud} , P_0, P_1 :

I. Questions préliminaires

A. Généralités sur les moteurs

1. Quels sont les signes de W, Q_{froid} et Q_{chaud} dans la convention thermodynamique ?
2. Définir l'efficacité (appelée aussi: rendement thermodynamique) (notée η) du moteur.
3. On désigne l'entropie produite au cours d'un cycle par S^p_{cycle}. À partir de l'écriture du premier et deuxième principes de la thermodynamique sur le cycle, établir l'expression de l'efficacité et montrer que l'efficacité maximale du moteur est obtenue pour un fonctionnement réversible. Donner l'expression de cette efficacité maximale en fonction des températures des sources.

B. Gaz parfait

4. Rappeler la relation de Mayer pour un gaz parfait qui relie les capacités thermiques molaires C_V à volume constant et C_P à pression constante et la constante R. Retrouver l'expression de C_V et celle de C_P en fonction de R et de γ.
5. Retrouver l'expression de la variation d'énergie interne massique (pour une masse unité) Δu entre deux états d'équilibre quelconques en fonction de R, M_{air} , γ et ΔT (la variation de température entre les deux états).
6. En déduire l'expression de la variation d'enthalpie massique Δh entre deux états d'équilibre quelconques en fonction des mêmes grandeurs.

II. Thermodynamique du moteur

La masse d'air m subit dans le moteur la succession de transformations suivante :

a. Une transformation d'un état d'équilibre noté A à un état d'équilibre noté B, qui fait passer la pression d'une valeur basse P_0 à une valeur haute P_1. Les températures et les volumes dans l'état A et dans l'état B sont respectivement $T_A = T_{\text{froid}}$, V_A, $T_B = T_{\text{froid}}$ et V_B. À ce stade rien n'est dit sur la nature ni la réalisation de cette transformation. On indique seulement qu'il n'y a pas, au cours de cette transformation, d'échange d'énergie thermique avec le thermostat Σ_C mais il peut y en avoir avec Σ_F. On sait aussi que le gaz dans l'état A et dans l'état B est en équilibre thermique avec le thermostat Σ_F. De plus, on note W_{AB} la quantité d'énergie échangée sous forme de travail par le système au cours de cette transformation inconnue $A \to B$.

b. Un échauffement monobare au contact du thermostat Σ_C de l'état d'équilibre B à l'état d'équilibre C. La température, le volume et la pression de l'état C sont respectivement $T_C = T_{\text{chaud}}$, V_C et $P_C = P_1$.

c. Une détente adiabatique réversible qui fait passer le gaz de l'état d'équilibre C à l'état d'équilibre D. La température, le volume et la pression de l'état D sont respectivement T_D, V_D et $P_D = P_0$

d. De l'état d'équilibre D, un refroidissement monobare au contact du thermostat Σ_F ramène le système à l'état initial d'équilibre A.

A. Étude du cycle

1) Les états d'équilibres

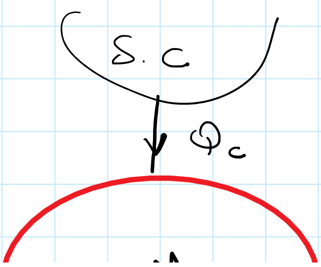
7. Exprimer en fonction des données puis calculer numériquement les volumes V_A, V_B et V_C
8. Exprimer en fonction des données: $\frac{T_D}{T_C}$ et $\frac{V_D}{V_C}$ puis calculer numériquement la température T_D et le volume V_D. On démontrera les relations utilisées.
9. Positionner qualitativement les points d'équilibre A, B, C et D dans un diagramme de Clapeyron (P, V) et tracer l'allure .

2) Calculs d'entropie

On étudie chaque transformation afin de déterminer l'entropie produite au cours de chaque transformation.

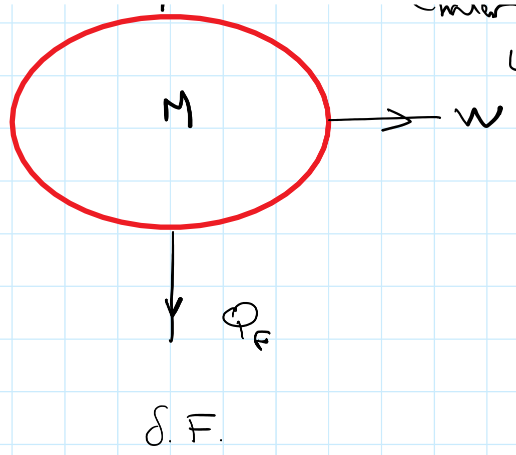
10. On étudie la transformation $B \to C$. Exprimer en fonction des données puis calculer numériquement Q_{BC}. Exprimer en fonction des données puis calculer le terme de transfert d'entropie S^{tr}_{BC} au cours de cette transformation. Idem pour le terme de production d'entropie S^{p}_{BC}.
11. On étudie la transformation $D \to A$. Exprimer en fonction de $m, \gamma, R, M_{\text{air}}$, T_{froid} , T_D puis calculer numériquement Q_{DA}. Exprimer, en fonction des mêmes grandeurs, puis calculer le terme de transfert d'entropie S^{tr}_{DA} au cours de cette transformation. Idem pour le terme de production d'entropie S^{p}_{DA}.
12. On étudie la transformation $C \to D$. Déterminer le terme de transfert d'entropie S^{tr}_{CD} et le terme de production d'entropie S^{p}_{CD} au cours de cette transformation.
13. On étudie la transformation inconnue $A \to B$. Écrire la relation entre W_{AB} et Q_{AB}. Exprimer (démontrer la relation utilisée) et calculer $\Delta S_{AB} (= S^{tr}_{AB} + S^{p}_{AB})$ pour cette transformation. Exprimer le terme de production d'entropie S^{p}_{AB} au cours de cette transformation en faisant intervenir W_{AB}.

1 . moteur :



pour moteur qui prend de la chaleur à la source chaude,
↳ fournir un travail

chaleur de la source chaude.
↳ fournir un travail

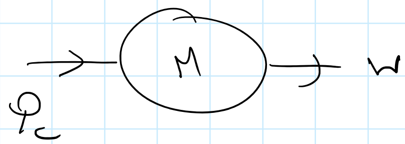


* moteur :

$W < 0$

$Q_C > 0$

$Q_F < 0$



$$\eta = \frac{|W|}{Q_C}$$

2) l'efficacité :

$$\eta = \frac{\text{travail fournit par le moteur}}{\text{chaleur fournit par la source chaude}}$$

$$\eta = -\frac{W}{Q_C}$$

3) 1er principe :

$$\Delta U_{cycle} = Q_C + Q_F + W = 0 \quad (1)$$

$$\Delta S_{cycle} = S^{tr}_{cycle} + S^{p}_{cycle} = 0$$

$$\eta = -\frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

$$\Delta S_{cycle} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S^{p}_{cycle} = 0$$

d'où :

$$\frac{T_F}{T_C} + \frac{Q_F}{Q_C} + \frac{T_F}{Q_C} \cdot S^{p}_{cycle} = 0$$

($S^p > 0$)

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f}{\underbrace{Q_c}_{\geq 0}} S^{c}_{cycle}}$$

$(S^{c} \geq 0)$

$= 0$: rev

> 0 : irre

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f}{Q_c} S^{c}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$$\eta \leq \underbrace{1 - \frac{T_f}{T_c}}_{\eta_{max}}$$

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f}{Q_c} \underbrace{S^{c}_{cycle/rev}}_{= 0} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

* Capacité Calorifique C : $C = \frac{\delta Q}{dT}$ $[J/K]$

* chaleur massique C_m (chaleur spécifique)

$C_m = \frac{C}{m}$ $[C_m] = J/K\,kg$

* chaleur molaire : C_M : $C_M = \frac{C}{n}$ $(J/K.mol)$

$n = \frac{m}{M}$

* relation de mayer : $C_p - C_V = nR$ $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

$$\frac{C_p}{n} - \frac{C_V}{n} = R$$

$$\| C_{p,M} - C_{V,M} = R. \|$$

n mol :

$$C_p - C_V = nR$$

$$\frac{C_p}{C_V} - 1 = \frac{nR}{C_V}$$

$$\gamma - 1 = \frac{nR}{C_V}$$

$$\boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

$$C_p - C_V = nR$$

$$C_p = nR + C_V$$

$$\| \; C_p = nR + \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \; \|$$

$$\begin{cases} C_{V,M} = \dfrac{C_V}{n} = \dfrac{R}{\gamma-1} \\ C_{M,p} = \dfrac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1} \end{cases}$$

$$du = C_{v,m}\, dT \qquad n = \frac{m}{M}$$

$$C_v = \frac{nR}{\gamma-1} \rightsquigarrow C_{v,m} = \frac{nR}{(\gamma-1)\, m_{air}}$$

$$C_{v,m} = \frac{R}{M_{air}(\gamma-1)} \quad : \qquad r = \frac{R}{M_{air}}$$

$$C_{v,m} = \frac{r}{\gamma - 1}$$

$$\| \; C_p = \frac{r\gamma}{} \; \|$$

1) $C_{p,m} = \frac{r\gamma}{\gamma-1}$

$$dU = \frac{R}{M_{air}} \cdot \frac{1}{(\gamma-1)} \, dT$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{R}{M_{air}} \cdot \frac{1}{(\gamma-1)} \cdot \Delta T}$$ (J/kg).

6) $dh = C_{p,m} \, dT$.

$$\Delta h = C_{p,m} \cdot \Delta T.$$

$$\Delta h = \frac{R}{M_{air}} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \, \Delta T$$ (J/kg).

II) 1) 7).

$$A \xrightarrow[?]{\text{expérience de } \Sigma_F} B \xrightarrow{\text{expérience de } \Sigma_C} C \xrightarrow{\text{adiab rév}} D$$

A	B	C	D
$p_A = p_0$ ✓	$p_B = p_1$	$p_C = p_1$	$p_D = p_0$
$T_A = T_{Froid}$	$T_B = T_F$	$T_C = T_{chaud}$	T_D
$V_A = ?$	$V_B = ??$	V_C	V_D

$D \longrightarrow A$

* $p_A \cdot V_A = nRT_A$ $\qquad r = \frac{R}{M}$

$$p_A V_A = \frac{m}{M} R T_A = m \, r \, T_A.$$

$$V_A = m \cdot \frac{R}{M_{air}} \cdot \frac{T_{Froid}}{p_0}$$

AN : $V_A = 1 \cdot \frac{8.32}{\dots} \cdot \frac{290}{\dots} = \boxed{0.822 \text{ m}^3}$.

AN : $V_A = 1 \cdot \frac{8.32}{0.029} \cdot \frac{290}{10^5} = \boxed{0.832 \ m^3}$.

* $V_B = m \cdot \frac{R}{M_{ar}} \cdot \frac{T_{froid}}{P_1}$

AN : $V_B = 1 \cdot \frac{8.32}{0.029} \cdot \frac{290}{10^6} = 0.0832 \ m^3$.

* $V_C = m \cdot \frac{R}{M_{air}} \cdot \frac{T_{chaud}}{P_1}$

AN : $V_C = 0.273 \ m^3$.

8) $C \longrightarrow D$: transf. adia. rév :

$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = cte$. $\boxed{P V^{\gamma} = cte}$

$\frac{T_C^{\gamma}}{P_C^{\gamma-1}} = \frac{T_D^{\gamma}}{P_D^{\gamma-1}}$

$T_D = T_{chaud} \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

AN : $T_D = 950 \cdot \times (10)^{-\frac{0.4}{1.4}}$

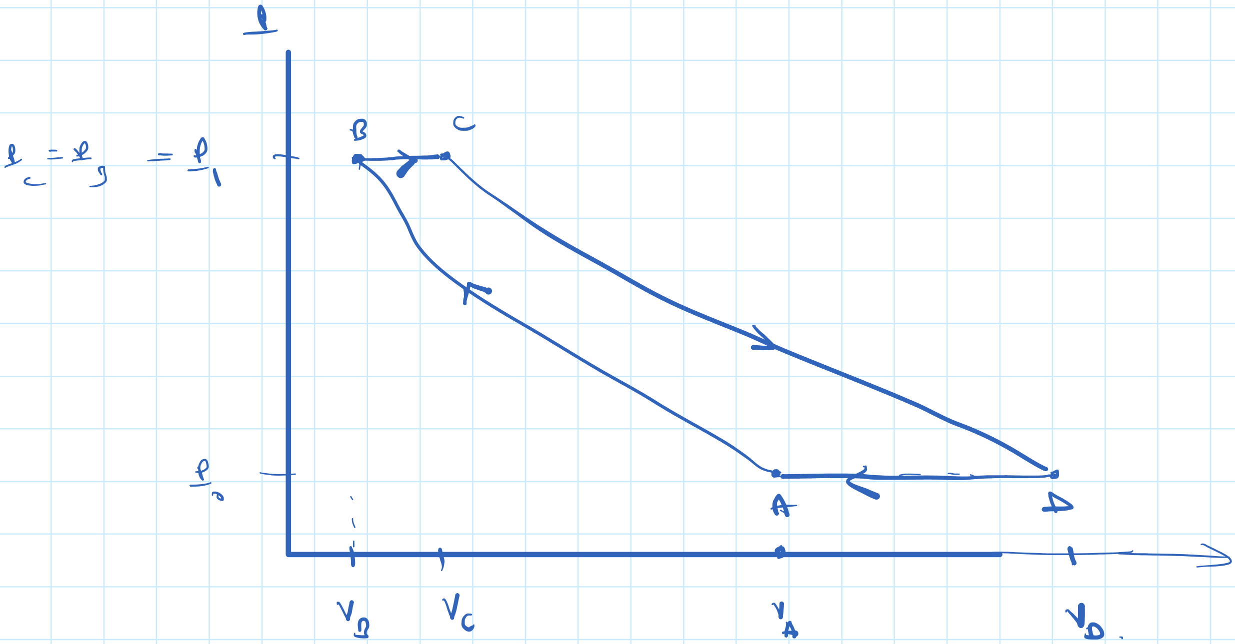
$\boxed{T_D = 492 \ K}$

* $P_C V_C^{\gamma} = P_D \cdot V_D^{\gamma}$

$- \ ^{1/\gamma}$

$$V_D = V_C \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$

AN : $$V_D = 0.273 \cdot (10)^{1/1.4} = \boxed{1.41\ m^3}$$

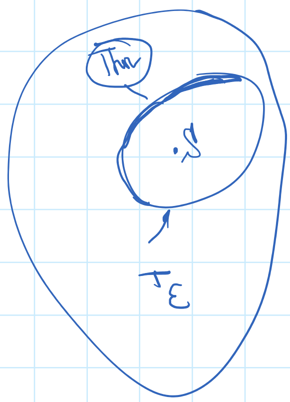


2) Calcul d'entropie :

B $\longrightarrow$ C : (Transf. monobare) Chauffage par la source chaude

$$Q_{BC} = m \cdot \Delta h$$

$$Q_{BC} = m \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{R}{M_{air}} \cdot (T_{chaud} - T_{froid})$$



* S^{tr}_{BC} :

$$S^{tr}_{BC} = \int_{BC} \frac{\delta Q}{T_{frontière}} = \frac{Q_{BC}}{T_C}$$

$$S^{tr}_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{K}{M_{air}}\left(1-\frac{T_F}{T_C}\right)$$

Démo :

$$\underbrace{dH}_{n.C_p.dT} = T.\,dS + V\,dP. \qquad \left(dH = d(U+P.V)\right)$$

$$dS = n\,C_p.\,\frac{dT}{T} - \frac{V}{T}.\,dP.$$

$$dS = n\,C_p.\,\frac{dT}{T} - \underbrace{nR}\,\frac{dP}{P} \qquad d\ln T = \frac{dT}{T}$$

$$d\ln P = \frac{dP}{P}$$

$$dS = \frac{nK\gamma}{\gamma-1}.\left(\frac{dT}{T} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma}.\frac{dP}{P}\right)$$

$$S_{T,P} - S_0 = \frac{nR}{\gamma-1}.\left(\ln T^{\gamma} - (\gamma-1)\ln P\right)$$

$$\boxed{S_{T,P} = \frac{nK}{\gamma-1}.\ln.\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} + S_0}$$

$$\Delta S = m.\frac{\gamma}{\gamma-1},\frac{K}{M_{air}}\ln\frac{T_{final}}{T_{initial}} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\frac{P_{final}}{P_{init}}$$

$$\Delta S_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{K}{M_{air}}.\ln\left(\frac{T_{chaud}}{T_{froid}}\right) \qquad (\text{car monobare})$$

$$\Delta S_{BC} = S^{P} + S^{tr}_{BC}$$

$$S^{P} = \Delta S_{BC} - S^{tr}_{BC}$$

$$S^{P}_{BC} = m.\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{K}{M_{air}}\ln\left(\frac{T_C}{T_F}\right) - \frac{Q_{BC}}{T_C}$$

11. Transf. (DA) : φ_{DA} :

$$\varphi_{DA} = m \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M_{air}} \left(T_{Froid} - T_D \right)$$

$$S^{tr}_{DA} = \frac{\varphi_{DA}}{T_F} = m \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M_{air}} \left(1 - \left(\frac{T_F}{T_D}\right)^{-1} \right)$$

$$S^{c}_{DA} = \Delta S_{DA} - S^{tr}_{DA} = m \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M_{air}} \left(\ln\left(\frac{T_F}{T_D}\right) + \left(\frac{T_F}{T_D}\right)^{-1} - 1 \right)$$

EXERCICE 2 :

On considère un moteur fonctionnant suivant le cycle Diesel décrit ci-dessous :

A_1A_2 : compression adiabatique réversible de l'air caractérisé par le rapport : $x = \frac{V_1}{V_2}$

A_2A_3 : injection du carburant finement pulvérisé dans l'air comprimé et chaud provoquant son inflammation. La combustion se produit à pression constante.

A_3A_4 : détente adiabatique réversible des gaz.

A_4A_1 : ouverture de la soupape d'échappement, ramenant instantanément la pression à p_1. Les gaz subissant un refroidissement isochore.

La quantité de carburant injecté étant faible devant la quantité d'air aspiré, on considérera que le nombre total de moles n'est pas modifié par la combustion.

On considère les gaz comme un gaz parfait de constante $R = 8{,}32$ J. mole^{-1}. K^{-1}, de capacité thermique molaire à pression constante $c_P = 29$ J. mole^{-1}. K^{-1}.

On étudie les transformations subies par une mole de gaz parfait.

1)- Ce gaz est admis dans les cylindres à la pression $p_1 = 105$ Pa et à la température $T_1 = 330$K.

a- Calculer le volume V_1.

b- Calculer la pression p_2 et à la température T_2 en fin de compression sachant que x = 14.

2)- En fin de la combustion, la température du gaz est $T_3 = 2260$ K. Calculer le volume V_3 ainsi que la chaleur Q_{23} reçue par le gaz lors de la combustion.

3)- Calculer la pression p_4 et à la température T_4 en fin de détente.

4)- a- Calculer la quantité de chaleur Q_{41} cédée par le gaz au cours de la transformation isochore.

b- Calculer le rendement ρ de ce moteur.

5)- Représenter ce cycle dans le diagramme de Clapeyron p = f (V)

A_1	$p_1 = 10^5$ Pa $\xrightarrow{\text{adib. rev.}}$ A_2	p_2 $\xrightarrow{p = \text{cte}}$ A_3	$p_3 = p_2$ $\xrightarrow{\text{adi. rev}}$ A_4
	$T_1 = 330$K.	$T_2 =$	$T_3 = 2260$K.
	$V_1 = ?!$	$V_2 =$	$V_3 = ?!$
	$n = 1$mol.	$n = 1$mol	$n = 1$ mol

1. a) l'EGP : $p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{RT_1}{p_1}$

AN : $V_1 = \frac{8.32}{10^5} \times 330 = 0.0274\ m^3 = 27{,}4\ l$.

b) $pV^\gamma = \text{cte}$ (car adia. réve. entre A_1A_2)

$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

$p_2 = p_1 . \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = p_1 . (x)^\gamma$

1.4.

$C_v, C_p = f(\gamma)$

$$\text{AN}: \quad P_2 = 10^5 \cdot (14)^{1.4} \qquad C_v, C_p = f(\gamma)$$

$$= 40.2 \; 10^5 \; P_a = 40{,}2 \text{ atm.}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$T_2 = 330 \times (14)^{0.4}$$

$$\boxed{T_2 = 948{,}34 \text{ K}}$$

$$P_3 V_3 = n R T_3 \Rightarrow V_3 = \frac{R T_3}{P_3}$$

isobare: $PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{R} = \frac{T}{V} \Rightarrow \frac{T}{V} = \text{cte}$

$$\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_2}{V_2}$$

$$V_3 = T_3 \cdot \frac{V_2}{T_2} = 2260 \times \frac{1.98}{948.34}$$

$$\boxed{V_3 = 4.66 \text{ litre}}$$

* isobare: $\varphi_{23} = \Delta H_{2-3} = n C_p \cdot \Delta T.$

$$\varphi_{23} = n C_p \cdot (T_3 - T_2)$$

$$= 29 \times (2260 - 948) \; (C_p)$$

$$\varphi_{23} = 38\,038{,}14 \text{ J.}$$

3) $A3 \xrightarrow{\text{adiab}} A4$:

réver

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma$$

AN: $P_4 = 40.2.10^5 \left(\frac{4.68}{27.4}\right)^{1.4}$

$$\boxed{P_4 = 3.37.10^5 \text{ Pa} = 3.37 \text{ atm}}$$

$$T_3 . V_3^{\gamma-1} = T_4 . V_4^{\gamma-1}$$

AN: $T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

$$\boxed{T_4 = 1112,7 \text{ K}}$$

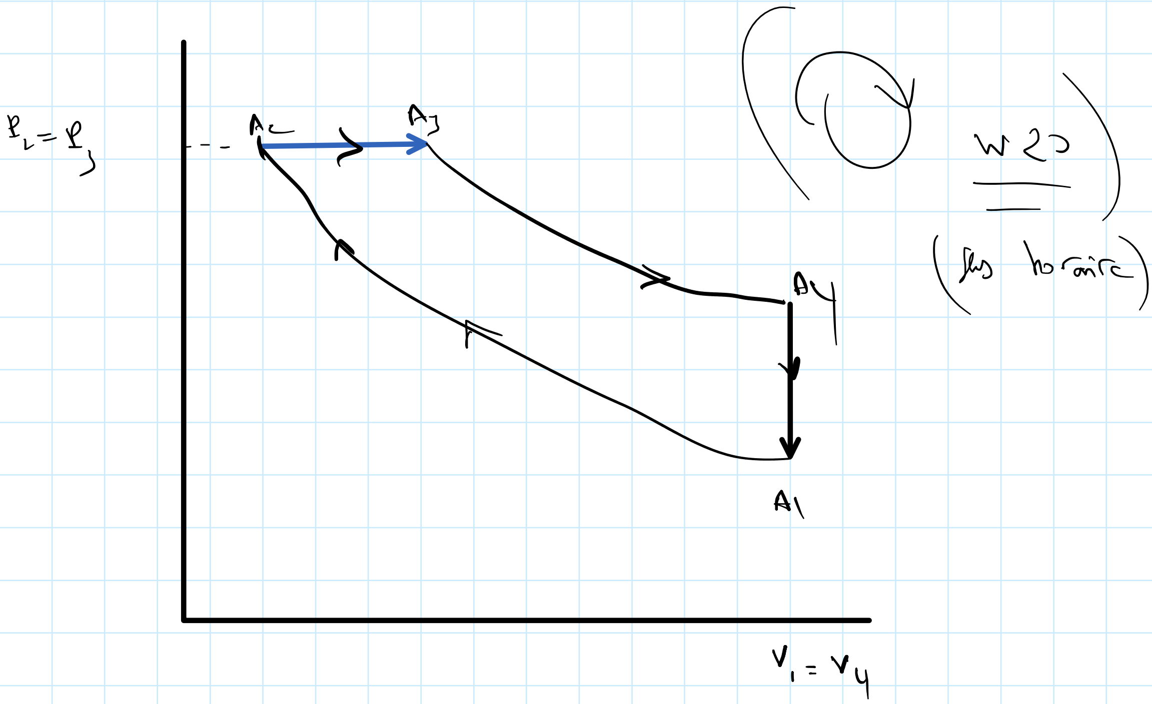
4) a) $A_4 \left| \begin{array}{l} T_4 \\ P_4 \\ V_4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{isochore}} A_1 \left| \begin{array}{l} P_1 \\ T_1 \\ V_1 \end{array} \right.$

isochore : $Q_{41} = \Delta U = C_v \Delta T$.

$$Q_F = Q_{41} = C_v(T_4 - T_1) = -16280,2 \text{ J}.$$

b) $$e = \frac{-W_{cycle}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$e = 0,572 = 57\%$$



$P_2 = P_3$
A_2
A_3
A_4
A_1
$V_1 = V_4$
$W < 0$
(sens horaire)