

Séance 4 : Problèmes premier principe

vendredi 4 novembre 2022 18:22

Exercice 10

Rappeler les trois relations de la chaleur en cas générale.

- ❖ Calculer les coefficients calorimétriques (l , h , λ et μ) en fonction de C_p , C_v et des dérivées partielles.
- ❖ Donner la relation de Meyer généralisée.
- ❖ Pour un gaz parfait, le volume molaire normal vaut 22,414 litres/mol, Calculer R en utilisant les unités du système international.
- ❖ Donner les trois relations de Clausius de la chaleur pour un gaz parfait ainsi que la relation de Meyer pour une mole.
- ❖ Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, calculer C_p et C_v pour $\gamma = 1.4$.

$$\delta Q = C_v \cdot dT + l \cdot dV \quad (T, V) \quad \textcircled{1}$$

$$\delta Q = C_p \cdot dT + h \cdot dP \quad (T, P) \quad \textcircled{2}$$

$$\delta Q = \lambda \cdot dP + \mu \cdot dV \quad (P, V) \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} : \quad C_v dT + l dV = C_p dT + h dP \quad *$$

$$* \quad P = cte \Rightarrow dP = 0$$

$$C_v dT + l dV = C_p dT \Rightarrow l dV = (C_p - C_v) dT$$

$$\Rightarrow l = (C_p - C_v) \frac{dT}{dV}$$

$$dT = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P dV + \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_V dP \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P$$

$$l = (C_p - C_v) \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P$$

$$* \quad C_v dT + l dV = C_p dT + h dP$$

$$* \quad P = cte \Rightarrow dP = 0$$

$$C_v dT = C_p dT + h dP$$

$$h = (C_v - C_p) \frac{dT}{dP} = - (C_p - C_v) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_V$$

$$dT = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P dV + \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_V dP \Rightarrow \frac{dT}{dP} = \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_V$$

$$* \quad dV = cte : \quad \lambda dP = C_v dT \Rightarrow \lambda = C_v \frac{dT}{dP} = C_v \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_V$$

$$* \quad P = cte : \quad \mu dV = C_p dT \Rightarrow \mu = C_p \frac{dT}{dV} = C_p \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_P$$

* a $v = \text{const}$: $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v}$
 * si $p = \text{const}$: $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v}$

2) la relation de Mayer generalisee:

$$\left\{ \begin{aligned} c_p - c_v &= T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_v \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \bigg|_p \quad * \\ c_p - c_v &= \ell \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \bigg|_p \quad * * \end{aligned} \right.$$

$$\ell = T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_v \quad (*)$$

$$du = \delta Q + \delta W = \delta Q - p \delta v$$

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right] dT + \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right] dv = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right] dT + \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right] dv \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial T} &= c_v \\ \frac{\partial u}{\partial v} &= p - \ell \end{aligned} \right. \quad * * *$$

d'f.p. T.E. :

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (p - \ell) \quad (*)$$

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} \quad (**)$$

$$\ell = T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \quad (*)$$

d'entropie :
(T.E)

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p - \ell}{T} dv$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{p - \ell}{T} \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} \right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p - \ell}{T} \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} \right) \quad (***)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} \quad (***)$$

* - * * = :

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial v}$$

$$\ell = T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_v$$

$$c_p - c_v = \ell \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \bigg|_p = T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_v \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \bigg|_p$$

R. Mayer generalisee.
(du, ds).
dT E dT E.

* Pour m. Ge.:

$$\left\{ \begin{aligned} du &= c_v dT + (\ell - p) dv \\ dv &= c_p dT + (p + \ell) dv \end{aligned} \right. \quad *$$

$u = u(T)$
 $h = h(T)$ } per loi de Joule.

* Pour un gaz:

$$\begin{aligned} dU &= C_v dT + (l-f) dv \\ dU &= C_p dT + (h+v) dv \end{aligned}$$

*

$$\left. \begin{aligned} U &= U(T) \\ H &= H(T) \end{aligned} \right\} \text{ par loi de Joule.}$$

* $l-f = 0 \Rightarrow l = f.$

$h+v = 0 \Rightarrow h = -v$

A démo: pour un gaz:

GR:

$$C_p - C_v = nR$$

la relation de Mayer: * $C_p - C_v = R.$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{nR}{C_v} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{nR}{C_v}$$

$$\Rightarrow C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$C_p - \frac{nR}{\gamma - 1} = nR$$

$$C_p = nR \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = nR \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

* Transf. adiabatique: (GR).

$$\delta Q = dU - \delta W = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} dU &= C_v dT = n C_{v,m} dT \\ dU &= \frac{nR}{\gamma - 1} dT \end{aligned} \right. \quad \text{et } \delta W = -p dv = -nRT \frac{dv}{v}$$

$$\delta Q = \frac{nR}{\gamma - 1} dT + nRT \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} dT + T \frac{dv}{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

intégrat

$$\Rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln v = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln v = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \ln(T v^{\gamma - 1}) = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow T v^{\gamma - 1} = e^{\text{cte.}} = \text{cte.}$$

$$T v^{\gamma - 1} = \text{cte.}$$

Exercice 1:

Une quantité d'un gaz, supposé parfait monoatomique, de volume $V_A = 0,6 \text{ l}$, à la température $T_A = 2 \text{ K}$ et sous la pression $P_A = 2,8 \text{ KPa}$, subit le cycle de transformations réversibles suivantes:

- ❖ Chauffage à volume constant de l'état A à l'état B où $T_B = 288 \text{ K}$.
- ❖ Détente adiabatique de l'état B à l'état C.
- ❖ Compression isotherme ramenant le gaz à son état initial.

1. Pour chaque état, déterminer les paramètres P , V et T du gaz.
2. Pour chaque transformation, calculer les quantités de chaleur et les travaux échangés.

Exercice 1 :

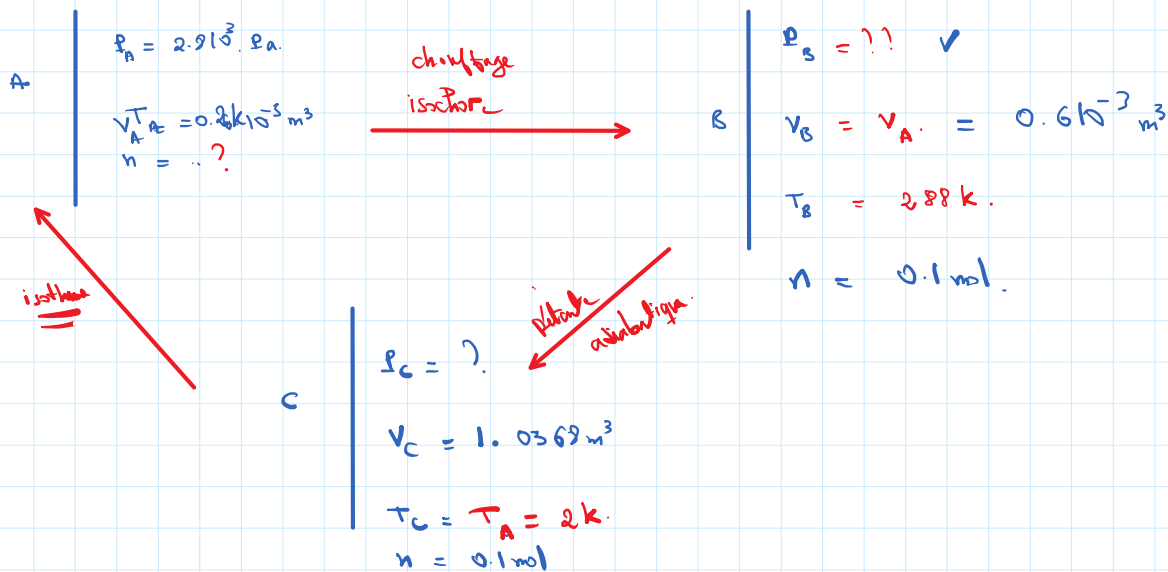
Une quantité d'un gaz, supposé parfait monoatomique, de volume $V_A = 0,6 \text{ l}$, à la température $T_A = 2 \text{ K}$ et sous la pression $P_A = 2,8 \text{ kPa}$, subit le cycle de transformations réversibles suivantes :

- ❖ Chauffage à volume constant de l'état A à l'état B où $T_B = 288 \text{ K}$.
- ❖ Détente adiabatique de l'état B à l'état C.
- ❖ Compression isotherme ramenant le gaz à son état initial.

1. Pour chaque état, déterminer les paramètres P , V et T du gaz.
2. Pour chaque transformation, calculer les quantités de chaleur et les travaux échangés.
3. Représenter le cycle de transformations dans le diagramme de Clapeyron. Que représente l'aire du cycle ?
4. D'après le sens de parcours du cycle, le gaz a-t-il reçu ou fourni du travail au milieu extérieur ? confirmer la réponse par l'application numérique.
5. Le premier principe est-il vérifié ?

On donne : Constante des gaz parfaits : $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
 Capacité calorifiques molaires : $C_{VM} = 3R/2$, $C_{PM} = 5R/2$.

G.P.



* n : $P_A V_A = n R T_A \Rightarrow n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{0.6 \cdot 10^{-3} \cdot 2.9 \cdot 10^3}{8.32 \cdot 2} = 0.1 \text{ mol}$

* $P_B V_B = n R T_B \Rightarrow P_B = \frac{n R T_B}{V_B} = 399.76 \text{ kPa}$

* $B \rightarrow C$: adiabatique. $P \cdot V^\gamma = \text{cte}$ / $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte}$

$P_B \cdot V_B^\gamma = P_C \cdot V_C^\gamma \Rightarrow$

$T_B \cdot V_B^{\gamma-1} = T_C \cdot V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_B$

AN :

$V_C = 1.0362 \text{ m}^3$

* $P_C V_C = n R T_C \Rightarrow P_C = \frac{n R T_C}{V_C} = 1.607 \text{ Pa}$

2) calcul de Q :

* A → B: (isochore)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{AB} = \delta Q_{AB} + \delta W_{AB}^0 = \delta Q_{AB} \\ \Delta U_{AB} = c_v \cdot \Delta T \end{array} \right.$$

$$\delta Q_{AB} = c_v \Delta T \Rightarrow Q_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} c_v \cdot dT = c_v (T_B - T_A) = n c_{v,n} (T_B - T_A)$$

$$\Rightarrow Q_{AB} = n \cdot \frac{3R}{2} (T_B - T_A)$$

AN:

$$Q_{AB} = 356.93 \text{ J.}$$

$$W_{AB} = 0 \text{ J.}$$

* B → C: (détente adiabatique): $\left(\frac{P}{\rho} v^\gamma = P_c v_c^\gamma = \text{cte} \right)$

$$Q_{BC} = 0 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} W_{BC} &= - \int P dV = - \int \text{cte} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= - \text{cte} \int \frac{dV}{V^\gamma} = - \text{cte} \int_{V_B}^{V_C} V^{-\gamma} dV \\ &= - \text{cte} \cdot \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_{V_B}^{V_C} \\ &= - \frac{\text{cte}}{1-\gamma} \left\{ V_C^{-\gamma+1} - V_B^{-\gamma+1} \right\} \\ &= - \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left\{ \text{cte} \cdot V_C^{1-\gamma} - \text{cte} \cdot V_B^{1-\gamma} \right\} \\ &= - \frac{1}{1-\gamma} \left\{ P_c V_C^\gamma V_C^{1-\gamma} - P_B V_B^\gamma V_B^{1-\gamma} \right\} \end{aligned}$$

$$W_{BC} = \frac{1}{\gamma-1} \left\{ P_c V_C - P_B V_B \right\} \cdot V$$

$$W_{BC} = \frac{1}{\gamma-1} nR \left\{ T_C - T_B \right\} *$$

$$W_{BC} = -356.93 \text{ J.}$$

$$W_{sc} = -376.93 \text{ J}$$

$$dU_{sc} = \underbrace{\delta Q_{sc}}_{=0 \text{ adiab.}} + \delta W_{sc} \Rightarrow dU_{sc} = \delta W_{sc} = n \cdot C_{V,n} \cdot dT \quad (1 \text{ mol/oi de Joule})$$

$$W_{sc} = \int_{T_B}^{T_C} n C_{V,n} \cdot dT = n C_{V,n} \cdot (T_C - T_B)$$

$$W_{sc} = \frac{3R}{2} n \cdot (T_C - T_B) \quad **$$

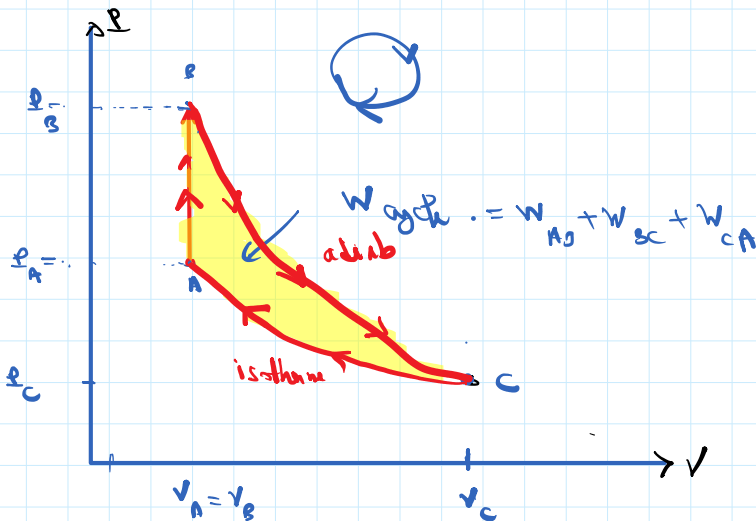
* C → A: isotherme. (dU = nC_{V,n} dT = 0 (dT=0))

$$Q_{CA} = \int_{T_C}^{T_A} n \cdot C_{V,n} \cdot dT + \int_{V_C}^{V_A} P dV = n C_{V,n} \cdot (T_A - T_C) + nRT \cdot \int_{V_C}^{V_A} \frac{dV}{V}$$

$$Q_{CA} = nRT \ln \frac{V_A}{V_C} = -12.4 \text{ J}$$

$$W_{CA} = -Q_{CA} = 12.4 \text{ J}$$

3) Diagramme de Clapeyron: (P, V)



Le cas d'un travail à milieu extérieur.



le gaz fournit du travail au milieu extérieur.

$$W_{\text{cycle}} < 0$$

$$W_{\text{cycle}} = W_{A1} + W_{B2} + W_{CA} = -344 \dots < 0$$

$$\tau. \quad \Delta U_{\text{cycle}} = \delta W_{\text{cycle}} + \delta Q_{\text{cycle}}$$

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}}$$

$$U_{\text{final}} - U_{\text{initial}} = \underbrace{W_{\text{cycle}}}_{-344 \dots} + Q_{\text{cycle}} = -344 \dots + 344 = 0$$

Le premier principe est vérifié.

Exercice 2 :

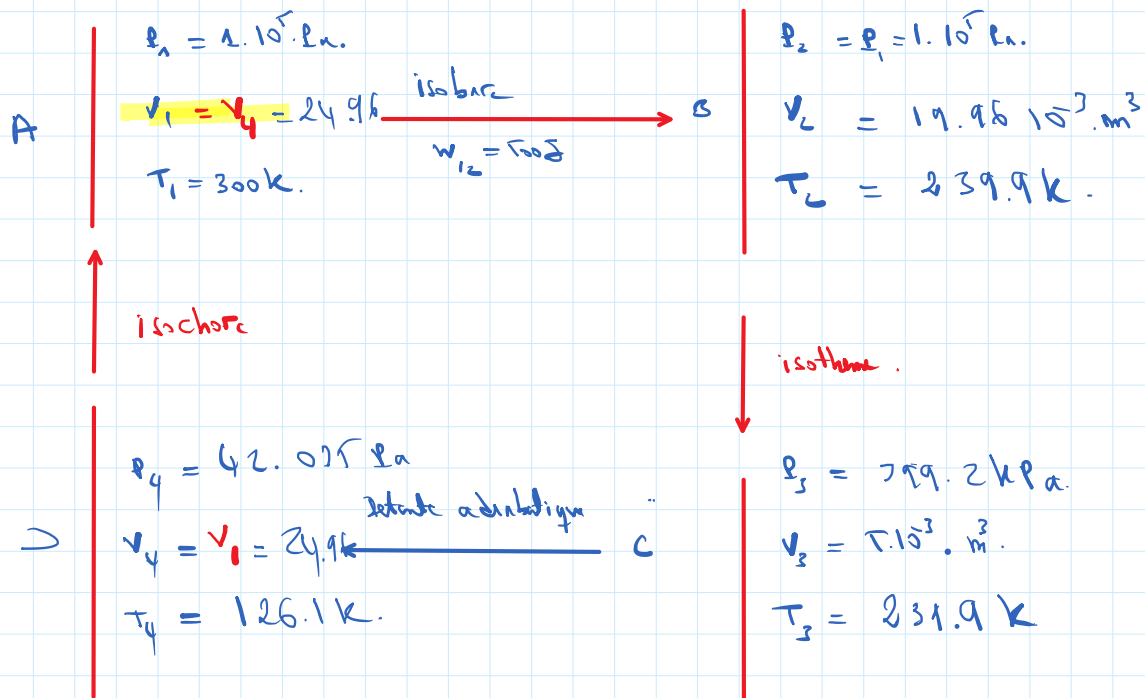
Une mole d'un gaz, supposé parfait, prise dans l'état initial 1 caractérisé par ($P_1 = 1\text{bar}$, V_1 , $T_1 = 300\text{K}$) décrit le cycle de transformations réversibles suivantes :

- Refroidissement isobare au cours de laquelle le gaz reçoit le travail $W_{12} = 500\text{J}$.
- Compression à température constante jusqu'au volume $V_3 = 5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$.
- Détente sans qu'il ait échange de chaleur jusqu'à la pression P_4 .
- Chauffage à volume constant ramenant le gaz à son état initial.

1. Déterminer les paramètres P , V et T aux différents états du cycle.
2. Représenter le cycle de transformations dans le diagramme de Clapeyron. S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ?
3. Calculer les quantités de chaleur échangées au cours de chaque transformation. En déduire la quantité de chaleur totale, Q_{cycle} , échangée au cours du cycle.
4. Déterminer la valeur numérique de W_{cycle} échangé au cours du cycle. Le résultat est-il compatible avec la question 2.
5. Dans le cas d'une pompe à chaleur, dresser un schéma de fonctionnement et en déduire l'efficacité correspondante.
6. Le deuxième principe de la thermodynamique est-il vérifié ?

On donne : Constante des gaz parfaits : $R = 8,32\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Rapport des chaleurs molaires : $\gamma = C_{PM}/C_{VM} = 7/5$.



$$* p_1 v_1 = RT_1 \Rightarrow v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 24.96 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

$$* w_{12} = - \int_{v_1}^{v_2} p \, dv = - p_1 (v_2 - v_1) \Rightarrow v_2 = v_1 - \frac{w_{12}}{p_1}$$

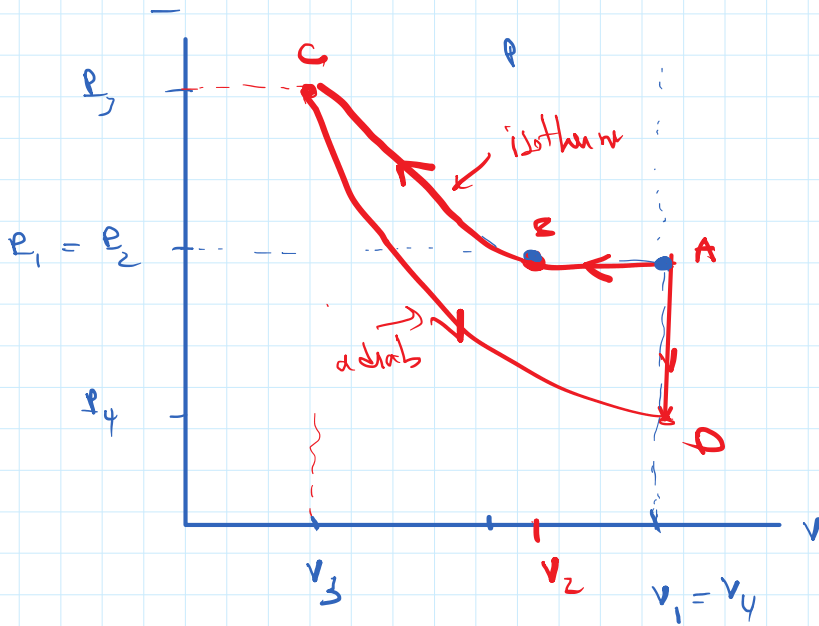
$$v_2 = 19.96 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

$$* p_2 v_2 = RT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{p_2 v_2}{R} = 239.9 \text{ K}$$

$$* p_3 v_3 = RT_3 \Rightarrow p_3 = \frac{RT_3}{v_3} = 399.2 \text{ kPa}$$

$$* p_4 v_4^\gamma = p_3 v_3^\gamma \Rightarrow p_4 = p_3 \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^\gamma = 42.055 \text{ Pa}$$

$$* T_4 = \frac{p_4 v_4}{R} \Rightarrow T_4 = 126.1 \text{ K}$$



↻ militaire

$W_{\text{cycle}} > 0$

Cycle récepteur

3. A → B. (isobare)

$$dU_{AB} = \delta Q_{AB} + \delta W_{AB} = \delta Q_{AB} - p \, dv$$

$$dT = c_p \, dT = d(u + pv) = du + p \, dv + v \, dp$$

$$= \delta Q - p \, dv + p \, dv + v \, dp$$

$$dT = \delta Q + v \, dp = c_p \, dT$$

isobare: $p = \text{cte}$

$$\delta Q_{AB} = c_p \, dT$$

$$Q_{AB} = \int_A^B c_p \, dT = c_p (T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = -1770 \cdot 11 \, J$$

* B → C (compression isotherme) ($T_B = T_C$)

$$dU_{BC} = \delta Q_{BC} + \delta W_{BC} \Rightarrow$$

$$\Delta U_{BC} = n T_{BC} \ln \frac{V_C}{V_B} \Rightarrow$$

$$\Delta U_{BC} = 0$$

$$Q_{BC} = -W_{BC} = + \int_{V_B}^{V_C} P dV = n T_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V}$$

$$Q_{BC} = n T_C \ln \frac{V_C}{V_B} = -2763 \text{ J}$$

$$W_{BC} = -Q_{BC} = +2763 \text{ J}$$

o C → D: isochore. $Q_D = 0 \text{ J}$.

o C → A: isochore. $dU_{CA} = dQ_{CA} \Leftrightarrow c_V \cdot (T_C - T_A) = Q_{CA}$
 $(W_{CA} = 0)$