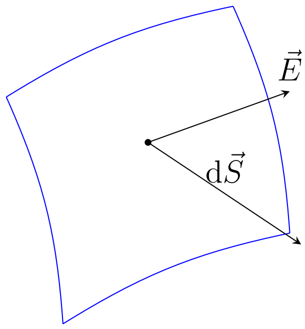
Théorème de Gauss :

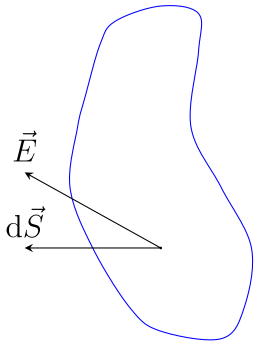
Flux du champ électrostatique :

Par définition, le flux Φ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface Σ est :

$$\Phi = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}$$



Théorème de Gauss :



Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque est le proportionnelle à la charge intérieure de cette surface, c'est-à-dire :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Par suite :

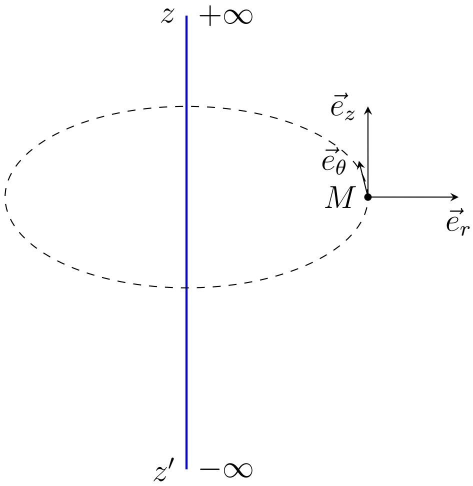
$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comment on peut utiliser le théorème de Gauss ?

1. Le choix du système des coordonnées.
2. Étude des invariances et symétries que le problème présente.
3. Le choix de la surface de Gauss.
4. Détermination de la charge intérieure Q_{int}.
5. Associer le module E trouvé à sa direction portée par un vecteur unitaire.

Traitons alors les cas classiques.

Champ crée par un fil infiniment long $\lambda > 0$ et C^{te} :



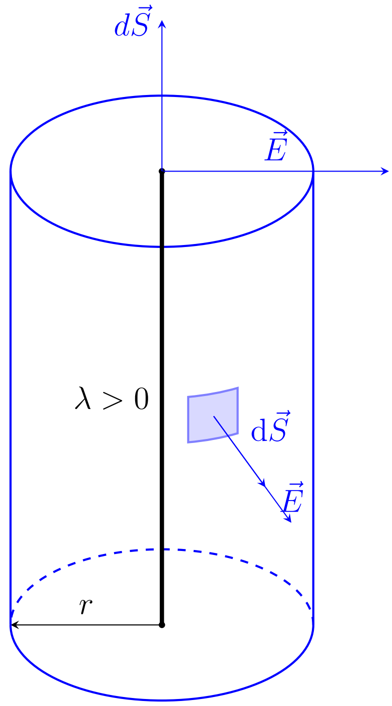
On a 2 invariances :
Invariance de translation le long de l'axe $(z'z)$, et une invariance de rotation par l'angle θ. Donc :

$$E(r,\theta,z) = E(r)$$

Pour la symétrie, on le plan perpendiculaire au fil et celui qui le contient sont des plans de symétrie pour cette distribution. Donc E est porté par leur intersection, c'est-à-dire par $\vec{e}_r$, finalement :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

La surface de Gauss est le cylindre de rayon r et de hauteur h, il contient alors 3 surfaces, dont 2 sont de base, et une latérale.



Le flux Φ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \underbrace{\oiint_{S_b} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}}_{=0} + \oiint_{S_L} E\mathrm{d}S \\ &= E.S_L \\ &= E \times 2\pi r h\end{aligned}$$

Et on a :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

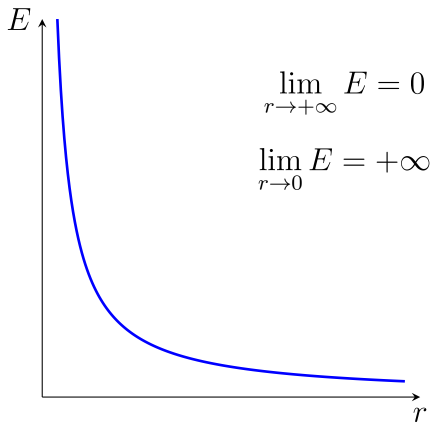
D'où :

$$2\pi E r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \iff E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Donc :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

L'allure de $E(r)$ sera :



Pour le potentiel on a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Or $\vec{E}$ est suivant $\vec{e}_r$ alors :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \\ \mathrm{d}V &= -E\mathrm{d}r \\ V &= -\int E\mathrm{d}r \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + C \end{aligned}$$

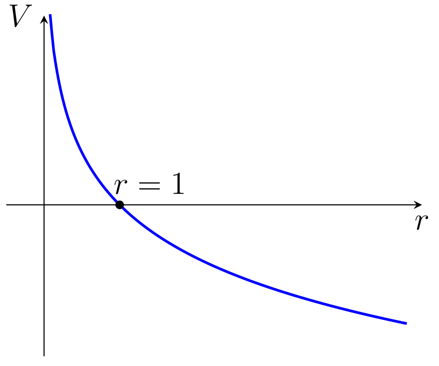
On pose $V_0 = 0$ lorsque $r = 1$ donc :

$$V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(1) + C \Longleftrightarrow C = 0$$

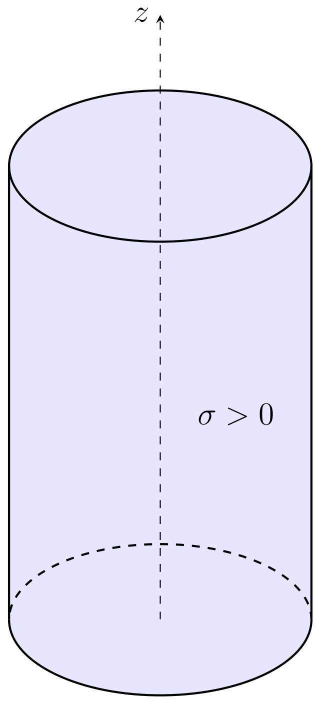
D'où :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

L'allure de $V(r)$ est :



Champ et potentiel crée par un cylindre chargé en surface $\sigma > 0$ et C$^{\text{te}}$:
On a toujours les mêmes invariances, et la même direction du champ, c'est-à-dire le champ est radial en plus il dépend que du r.



Afin de calculer le champ électrique dans tout l'espace, on va distinguer deux cas.

Si $r < R$:
On a $Q_{\text{int}} = 0$ car le cylindre est chargé uniquement en surface.
La surface de Gauss, sera le cylindre de rayon r et de hauteur h, donc :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r h E = 0$$

Par suite : $\vec{E} = \vec{0}$

Si $r > R$:
On a $Q_{\text{int}} = \iint \sigma \mathrm{d}S = \sigma 2\pi R h$.
La surface de Gauss, sera le cylindre de rayon $r > R$ et de hauteur h, donc :

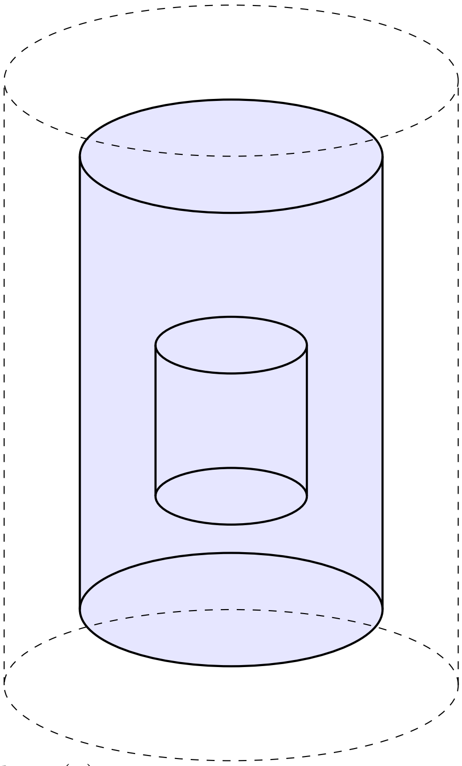
$$\Phi = \oiint \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r h E$$

D'après Th. de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

D'où :

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

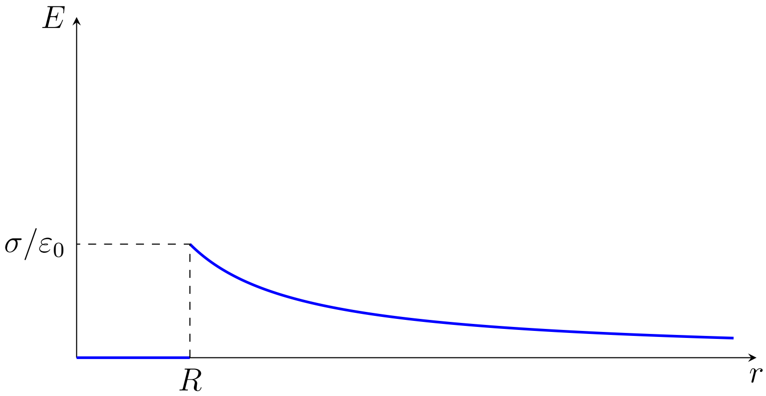


Donc en tout point d'espace on a :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

La figure ci contre représente les différentes Surface de Gauss choisi dans notre raisonnement.

Traçons l'allure de $E(r)$:



Attaquons le potentiel maintenant : On sait que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, or le champ est radial, alors : $\vec{E} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, donc :
Si $r < R$: $\mathrm{d}V = 0 \Longleftrightarrow V = C$, puisque, $V_0 = 0$ alors $C = 0$.
Si $r > R$, donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= -E\mathrm{d}r \\ V &= -\int E\mathrm{d}r \\ &= -\int \frac{\sigma R \mathrm{d}r}{\varepsilon_0 r} \\ &= -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + C' \end{aligned}$$

D'après le principe de continuité du potentiel en R :

$$\begin{aligned} V(R^+) &= V(R^-) \\ 0 &= \frac{-\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R) + C' \\ C' &= \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(R) \end{aligned}$$

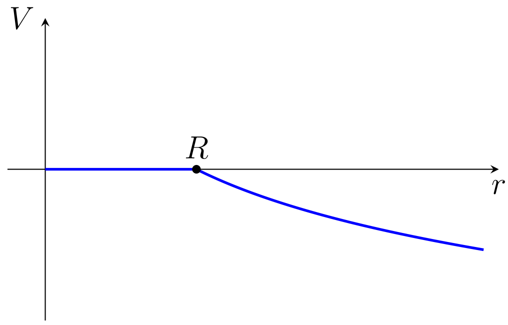
Donc :

$$V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

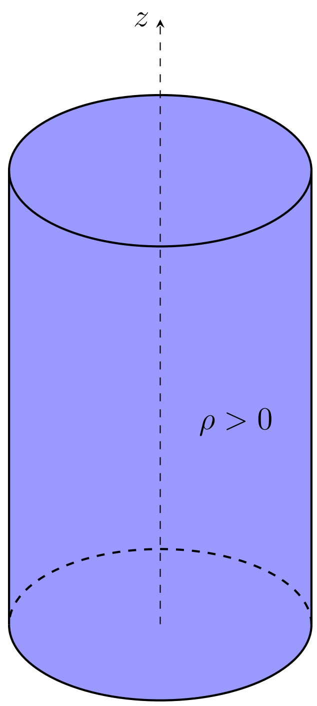
Dans tout point de l'espace on a :

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{R}{r}\right) & \text{si } r > R \end{cases}$$

Traçons l'allure de $V(r)$:



Champ et potentiel crée par un cylindre chargé en volume $\rho > 0$ et C^{te} :
Toujours $\vec{E}$ la démonstration pour arriver à ce résultat est analogue à ce qui précède.



On distingue toujours deux cas :

Si $r < R$:
On a $Q_{\text{int}} = \iiint \rho \mathrm{d}\tau = \rho \pi r^2 h$. La surface de Gauss est toujours le cylindre de rayon r et d'hauteur h, donc par application de th. de Gauss :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

On a 2 surfaces de bases et une latérale, comme nous avons vu le flux dans les surfaces de bases est nulle, donc il n'interviendra pas dans notre calcul.

$$\Phi = \oiint E \mathrm{d}S = E \times 2\pi r h$$

Donc :

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

Si $r > R$:

On a : $Q_{\text{int}} = \iiint \rho \mathrm{d}\tau = \rho\pi R^2 h$ La surface de Gauss est le cylindre de rayon r et de hauteur h, on mentionne qu'on a 3 surfaces, l'une est latérale où $\mathrm{d}\vec{S} \parallel \vec{E}$ et deux de bases où $\mathrm{d}\vec{S} \perp \vec{E}$, donc :

$$\Phi = 2\oiint_{\text{SB}} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} + \oiint_{\text{SL}} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = 0 + 2\pi E r h$$

D'après Th. de Gauss on a :

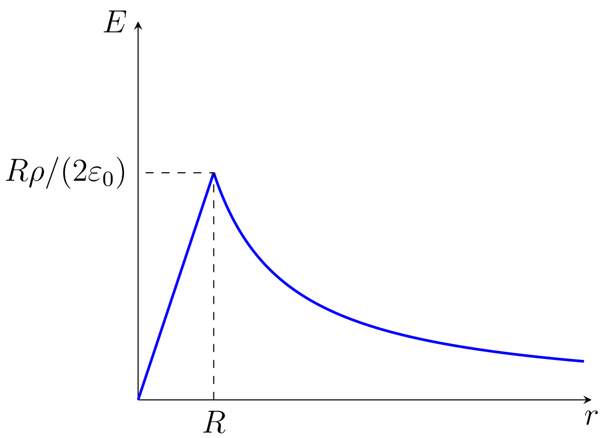
$$\Phi = 2\pi E r h = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

Donc, la champ électrostatique est :

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

Finalement en tout point de l'espace le champ est donné par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$



Pour le potentiel, on sait que le champ est radial, donc :

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \Longleftrightarrow -E\mathrm{d}r = \mathrm{d}V$$

Si $r < R$ alors, par simple intégration on obtient :

$$V = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C$$

Puisque $V_0 = 0 \Longleftrightarrow C = 0$, d'où :

$$V = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

Pour $r > R$ on a :

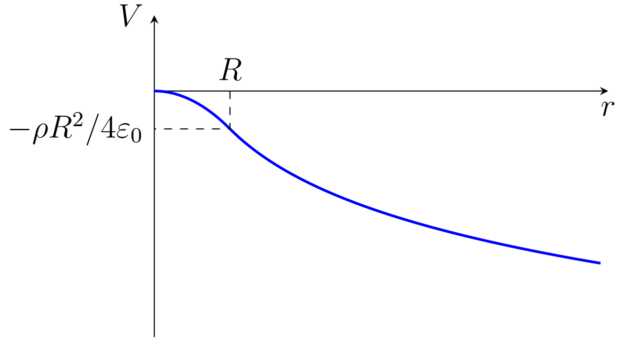
$$V = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(r) + C'$$

D'après le principe de la continuité des potentiels on a :

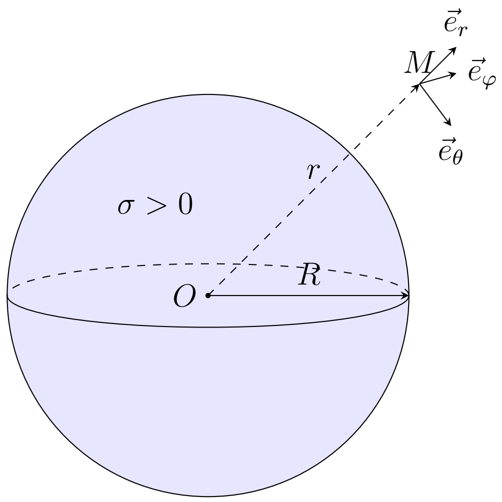
$$\begin{aligned}
V(R^+) &= V(R^-) \\
-\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(R) + C' &= -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} \\
C' &= -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(R) \\
C' &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2} + \ln R\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln\left(\dfrac{R}{r}\right) - \dfrac{1}{2}\right) & \text{si } r > R \end{cases}$$



Champ crée par une sphère chargée en surface $\sigma > 0$ et C^{te} :
Le raisonnement suivant sera analogue dans tout les prochains cas :
Le point M sera repéré en utilisant les coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$



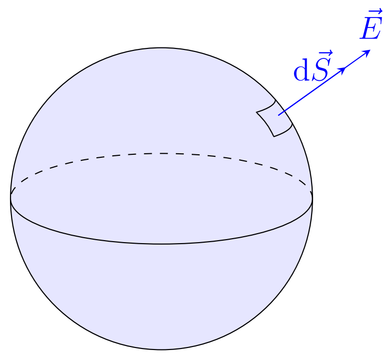
Les invariances : On a une invariance par double rotation d'angle θ et φ. Le champ ne dépend donc que de r.
La symétrie : Tout plan qui passe par le centre O est un plan de symétrie pour la distribution des charges. Leurs intersection est l'axe porté par $\vec{e}_r$. Finalement :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

La surface de Gauss : La sphère de centre O et de rayon r.
Le flux est donné par :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \oiint E.\mathrm{d}S = E4\pi r^2 \qquad \text{car } \vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{S}$$

Si $r < R$: La charge intérieure est nulle (puisque la sphère est chargée en surface), ce qui entraine l'absence du champ électrostatique : $\vec{E} = \vec{0}$.
Si $r > R$:



On a : $Q_{\text{int}} = \iint \sigma \mathrm{d}S = \sigma 4\pi R^2$, donc d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = \sigma 4\pi R^2 = E 4\pi r^2$$

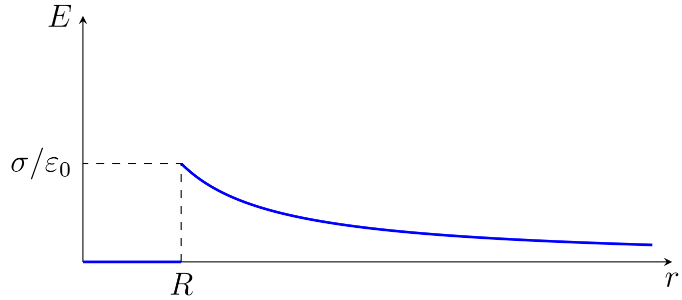
Donc :

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

Dans tout point de l'espace, le champ est donné par :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

L'allure de $E(r)$ est :



Calculons V tel que $V_\infty = 0$:
On a $\mathrm{d}V = -E\mathrm{d}r$,
Pour $r < R$: $V = C$
Pour $r > R$:

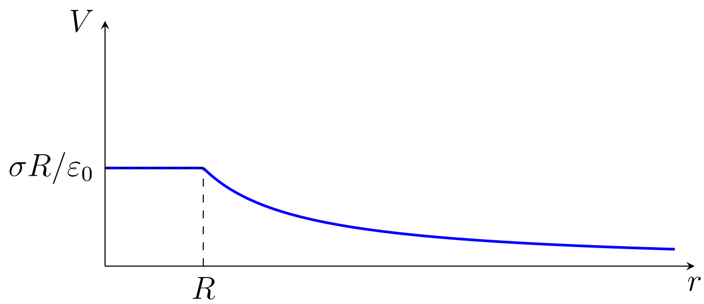
$$\mathrm{d}V = -\frac{\sigma R^2 \mathrm{d}r}{\varepsilon_0 r^2} \Longleftrightarrow V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C'$$

Puisque $V_\infty = 0 \Longleftrightarrow C' = 0$, d'après le principe de la continuité des potentiels :

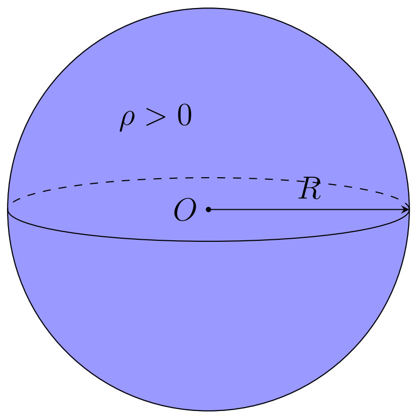
$$V(R^-) = V(R^+) \Longleftrightarrow C = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Donc en tout point de l'espace on a :

$$V = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}$$



Champ crée par une sphère chargée en volume $\rho > 0$ et C$^{\text{te}}$:

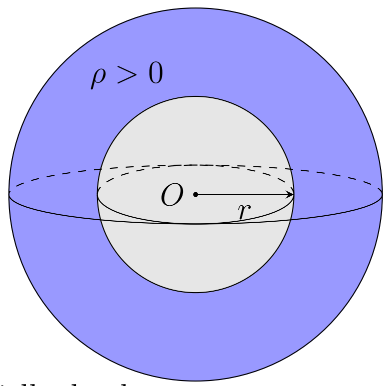


Le champ est toujours radial et ne dépend que du rayon.
Si $r < R$:

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Et :

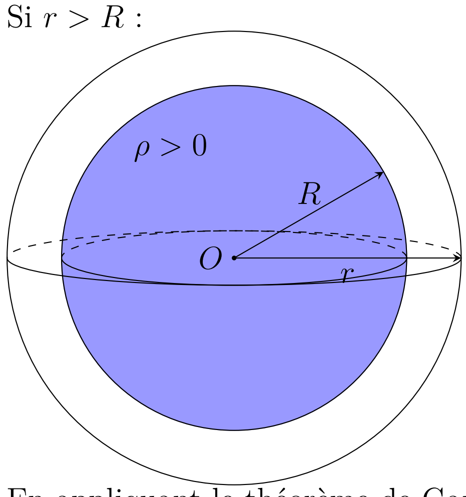
$$\Phi = E4\pi r^2$$



En appliquant le théorème de Gauss on aboutit à l'expression vectorielle du champ :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

Si $r > R$:



$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Et :

$$\Phi = E4\pi r^2$$

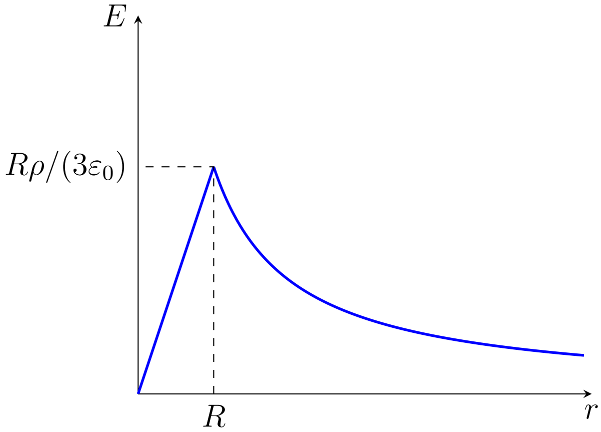
En appliquant le théorème de Gauss on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

En tout point d'espace on a :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

L'allure de cette fonction est :



Pour le potentiel on a toujours : $\mathrm{d}V = -E\mathrm{d}r$, et $V_0 = 0$:
Si $r > R$: Par simple intégration on obtient l'expression : $V = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C$, Or $V_0 = 0$ alors $C = 0$.
Si $r < R$: on obtient après une intégration : $V = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C'$.
D'après le principe de la continuité des potentiels on a :

$$V(R^+) = V(R^-) \Longleftrightarrow \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + C' = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} \Longleftrightarrow C' = \frac{-\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Par suite en tout point de l'espace on a :

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0 r} - \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases}$$