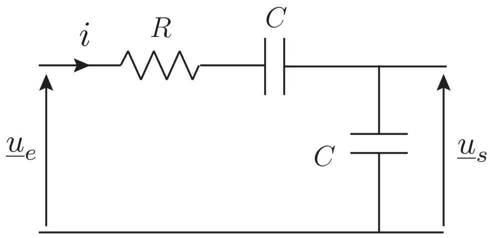
Série de travaux dirigés n°4

Module : Physique 2
Élément de module : Électrocinétique 2
Niveau : 1ère année du C.P
Année universitaire : 2019-2020

Exercice 1

Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous. En déduire la nature du filtre.



Solution:
D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

Soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{0.5}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{ref}} = \frac{RC\omega}{2}$$

On pose donc ici $\omega_{ref} = 2/RC$
On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure :

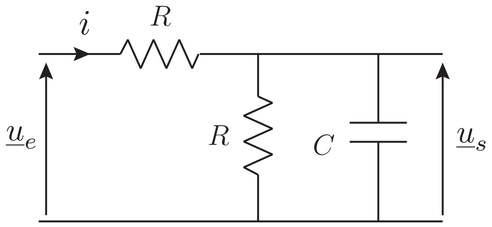
$$\omega = \omega_{ref} = \frac{2}{RC} \quad \text{et d'amplification} \quad H_0 = 0.5$$

Exercice 2

Q1. Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.

Q2. Tracer le diagramme de Bode

Q3. Déterminer les impédances d'entrée $\underline{Z}_e$ et de sortie du filtre $\underline{Z}_s$.



Solution:

S1. D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_2} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R \quad \text{et} \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$$

On obtient donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{0.5}{1 + 0.5jRC\omega}$$

S2. La fonction de transfert $\underline{H}$ peut s'écrire :

$$\underline{H}(jx) = \frac{0.5}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{ref}} = \frac{RC\omega}{2}$$

On pose donc ici $\omega_{ref} = 2/RC$

Étude du gain

Le gain a pour expression :

$$G(x) = 20\log|\underline{H}(jx)| = 20\log\left(\frac{0.5}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

soit :

$$G(x) = -20\log(2) - 10\log(1 + x^2)$$

— À basse fréquence, le gain tend vers :

$$G(x) \to -20\log(2) = -6\ dB = G_{max}$$

L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

— À haute fréquence, le gain tend vers :

$$G(x) \to -20\log(2) - 20\log(x)$$

L'asymptote correspondante est une droite de pente –20 dB/décade.

— Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $-20\log(2) = -6\ dB$

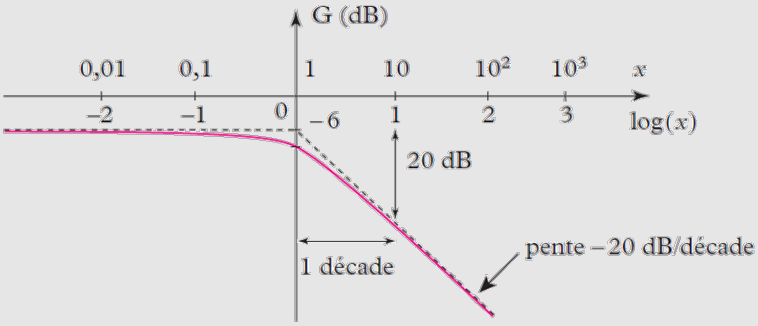
Pour cette abscisse, on a aussi :

$$G(1) = -20\log(2) - 10\log(2) = -6\ dB - 3\ dB = -9\ dB$$

La pulsation de coupure du circuit ω_c vaut donc :

$$x = \frac{\omega_c}{\omega_{ref}} = 1, \quad \text{soit} \quad \omega_c = \omega_{ref} = \frac{2}{RC}$$

La figure suivante présente le digramme de Bode du gain.



Étude de phase

La phase a pour expression :

$$\phi(x) = -\arg(1 + jx) = -\arctan(x)$$

— À basse fréquence, la phase tend vers :

$$\phi(x) \to 0$$

L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

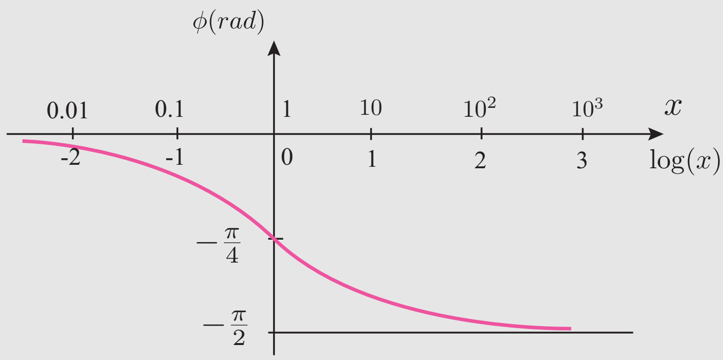
— À haute fréquence, la phase tend vers :

$$\phi(x) \to -\frac{\pi}{2}$$

L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

— Pour $x = 1$, $\phi(x) = -\frac{\pi}{4}$

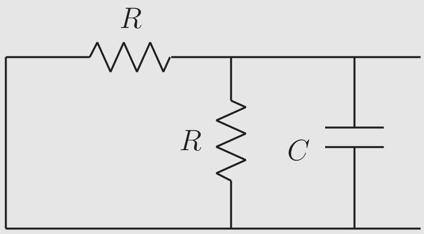
La figure suivante présente le digramme de Bode de phase.



S3. On détermine l'impédance d'entrée en laissant la sortie à vide. Dans ces conditions, la résistance R et l'association parallèle {C // R} sont en série :

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R\left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right)$$

On mesure l'impédance de sortie en court-circuitant l'entrée. Le circuit est alors :



Les trois dipôles R, R et C sont en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega, \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_s = \frac{R}{2 + jRC\omega}$$

Exercice 3

On a réalisé un filtre passe-bas à l'aide d'un condensateur de capacité C et d'une résistance $R = 1\ k\Omega$. La tension d'entrée a la valeur efficace $U_e = 6\ V$. On a mesuré la tension de sortie U_s en fonction de la fréquence, d'où le tableau suivant :

f (Hz)	200	500	1×10^3	2×10^3	5×10^3	1×10^4	2×10^4	4×10^4	1×10^5
Us (V)	5.95	5.72	5.08	3.73	1.82	0.943	0.476	0.191	$95.5\ 10^{-3}$

Q1. Tracer le diagramme de Bode du gain

Q2. Déterminer la fréquence de coupure

Q3. En déduire la capacité C du condensateur

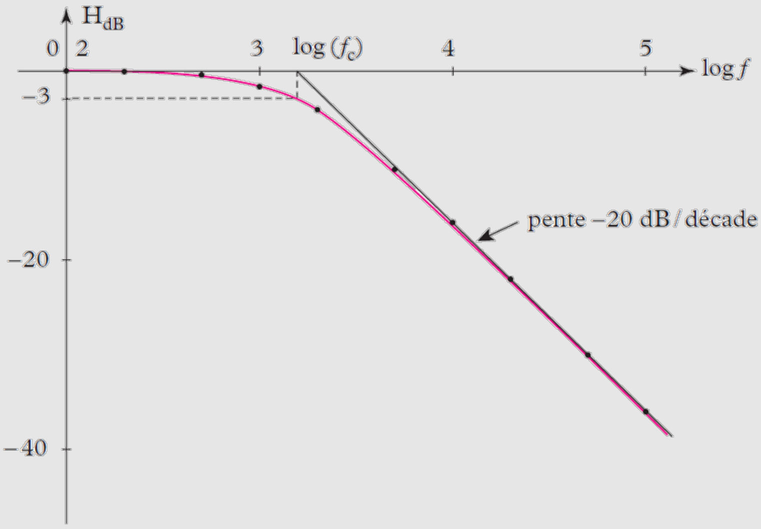
Solution:

S1. Pour tracer le diagramme de Bode, il faut déterminer $log(f)$ et H_{dB}. Pour cela, on utilise :

$$H_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = 20 \log \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$$

Le gain se note indifféremment G ou H_{dB}.

f	200	500	1×10^3	2×10^3	5×10^3	1×10^4	2×10^4	4×10^4	1×10^5
Us	5.95	5.72	5.08	3.73	1.82	0.943	0.476	0.191	$95.5\ 10^{-3}$
H	0.992	0.954	0.847	0.623	0.303	0.157	0.079	0.032	0.016
$\mathbf{H}_{dB}$	-0.07	-0.41	-1.4	-4.1	-10.4	-16	-22	-30	-36
$\mathbf{log}_f$	2.3	2.7	3	3.3	3.7	4	4.3	4.7	5

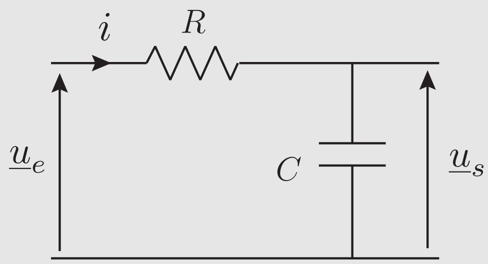


Pour le diagramme de Bode du gain, le choix de l'abscisse ($\log x$, $\log f$ ou $\log \omega$) ne change pas la forme de la courbe obtenue

S2. Graphiquement, on lit pour la fréquence de coupure à –3 dB :

$$\log(f_c) \approx 3.2, \quad \text{soit} \quad f_c = 1.6\ kHz$$

S3. Le filtre réalisé est un filtre passe-bas constitué d'un condensateur et d'une résistance. Il s'agit donc du montage :



la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

L'amplification du filtre vaut donc :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{d'où} \quad H_{max} = 1$$

La pulsation ω_c de coupure vérifie alors :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad RC\omega_c = 1$$

On en déduit la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = \frac{1}{2\pi R f_c} = \frac{1}{2\pi \times 1.10^3 \times 1.6\ 10^3} = 99 \times 10^{-8}$$