Série de travaux dirigés n°3

Module : Physique 2
Élément de module : Électrocinétique 2
Niveau : 1ère année du C.P
Année universitaire : 2019-2020

Exercice 1

On alimente le dipôle AD représenté sur le schéma de la figure ci-contre par une tension sinusoïdale de valeur instantanée $u(t) = U_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

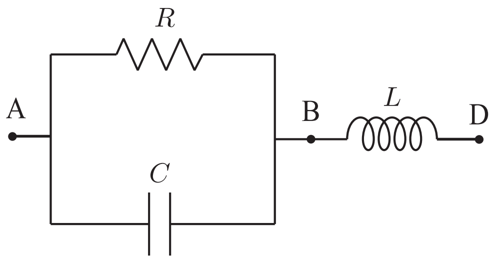


FIGURE 1 – Dipôle AD

Q1. Exprimer L en fonction de R, C et ω pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure Req. On donne $R = 100\ \Omega$, $C = 100/3\ \mu F$ et $\omega = 400\ rad/s$. Trouver l'angle de déphasage entre le courant et la tension.

Q2. Le circuit étant alimenté par une tension de valeur efficace $U_0 = 180\ V$, calculer la valeur efficace de l'intensité du courant I dans la bobine. Faire l'application.

Q3. Calculer les valeurs efficaces des différences de potentiel entre A et B puis B et D.

Q4. Calculer la valeur efficace des intensités des courants I_1 et I_2 circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur. Faire l'application numérique.

Q5. Calculer la puissance moyenne consommée dans le dipôle AD. Faire l'application numérique.

Solution:

S1. L'impédance du dipôle AD est,

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\frac{1}{jc\omega} \times R}{\frac{1}{jc\omega} + R} + jL\omega \\
&= \frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega \\
&= \frac{(1 - jRC\omega) \times R}{1 + (RC\omega)^2} + jL\omega \\
&= \frac{R - jR^2C\omega + \left[1 + (RC\omega)^2\right] jL\omega}{1 + (RC\omega)^2} \\
&= \frac{R + j\left[-R^2C\omega + \left[1 + (RC\omega)^2\right] L\omega\right]}{1 + (RC\omega)^2}
\end{aligned}$$

Pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure, il faut que la partie imaginaire de l'impédance soit nulle, ca vaut dire,

$$-R^2C\omega + \left[1 + (RC\omega)^2\right] L\omega = 0$$

Il vient,

$$L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = \mathbf{0.12\ H}$$

et,

$$Z = R_{eq} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} = 36\Omega$$

Puisque le dipôle AD se comporte comme une résistance dans ce cas, donc l'angle de déphasage entre la tension et le courant est égale à **0** *rad*

S2.

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{eq}} = \frac{180}{36} = \mathbf{5\ A}$$

S3.

$$U_{AB} = \frac{R}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \times I_0 = \mathbf{300\ V}$$

$$U_{BD} = L\omega I_0 = \mathbf{240\ V}$$

S4.

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R} = \mathbf{3\ A}$$

$$I_2 = C\omega U_{AB} = \mathbf{4\ A}$$

S5.

$$P = R_{eq} \times I_0^2 = \mathbf{900\ W}$$

Exercice 2

Le circuit électrique de la figure suivante comporte en série :

- une résistance $R = 170\ \Omega$.
- une bobine B d'inductance L et de résistance propre r.
- un condensateur $C = 2.5\ \mu F$.

Un générateur (G) impose aux bornes D et M de l'ensemble {(R), (B), (C)} une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi N t)$. de fréquence N réglable et de valeur efficace U constante.

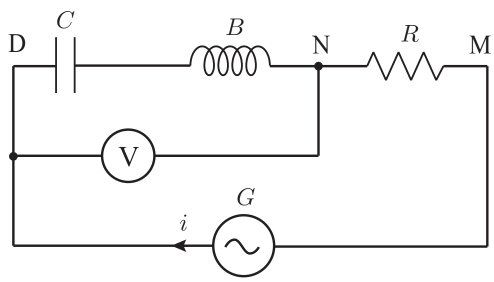


FIGURE 2 – Circuit RLC série

Un voltmètre (V) branché aux bornes D et N de l'ensemble {(B), (C)} mesure la valeur de la tension efficace U_{DN}.

Q1. A l'aide d'un oscillographe bicourbe à deux entrées Y1 et Y2 on veut visualiser la tension $u(t)$ sur la voie Y2 et $u_R(t)$ sur la voie Y1. Faire les connexions nécessaires sur la Fig 2.

Q2. On règle la fréquence du générateur à la valeur N_1 et sur l'écran de l'oscilloscope, on observe les oscillogrammes 1 et 2 de la Fig 3.

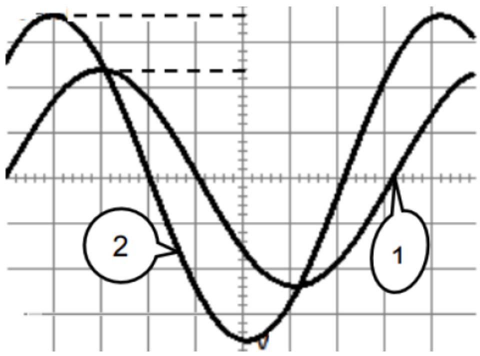


FIGURE 3 – Oscillogrammes (Balayage horizontal : $0.2\pi\ ms/div$ et sensibilité verticale : $5\ V/div$.)

(a) Montrer que l'oscillogramme 2 correspond à $u(t)$.

(b) Quel est l'oscillogramme qui nous permet de poursuivre les variations de $i(t)$. Justifier la réponse.

(c) Calculer l'amplitude I_m de l'intensité $i(t)$. Déduire la valeur de l'impédance Z.

(d) Calculer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Déduire le caractère inductif, capacitif ou résistif du circuit.

Q3. Faire la construction de Fresnel dans ce cas. On prendra comme échelle $2V \Rightarrow 1cm$. Déduire les valeurs de L et r.

Q4. Pour une fréquence N quelconque, exprimer la puissance moyenne P absorbée par l'oscillateur électrique en fonction de : U_m, R, r, L, C, et N.

Q5. P peut prendre une valeur maximale P_2 pour une fréquence N_2. Montrer que $N_2 = 160\ Hz$.

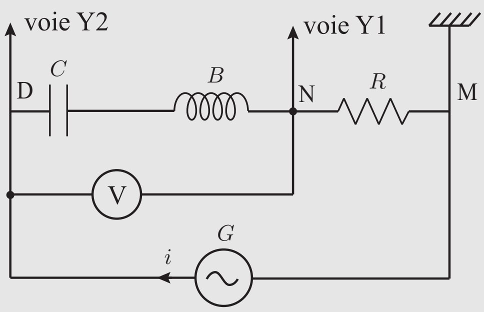
Q6. Exprimer P_2 en fonction de R, r et U_m puis calculer sa valeur.

Q7. La fréquence est toujours égale à N_2. Écrire l'expression de l'intensité du courant $i(t)$.

Q8. Quelle est la valeur de la tension indiquée par le voltmètre V dans ces conditions ?

Solution:

S1. Les connexions sont représentées sur la figure suivante,



S2. (a) On a la même sensibilité verticale, or $Z > R$; $ZI_m > RI_m$ donc $U_m > U_{Rm}$: la courbe qui a l'amplitude la plus grande correspond à $u(t)$ d'où la courbe 2 correspond à $u(t)$.

(b) La courbe 1 correspond à $u_R(t)$ qui est toujours en phase avec $i(t)$ (on a $u_R(t) = Ri(t)$ avec R=constante > 0) : c'est l'oscillogramme 1 qui permet de poursuivre les variations de $i(t)$.

(c)

$$I_m = \frac{U_{R,max}}{R} = \frac{2.4 \times 5}{170} = 0.07A = \mathbf{70\ mA}$$
$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{3.6 \times 5}{0.07} = \mathbf{257.14\ \Omega}$$

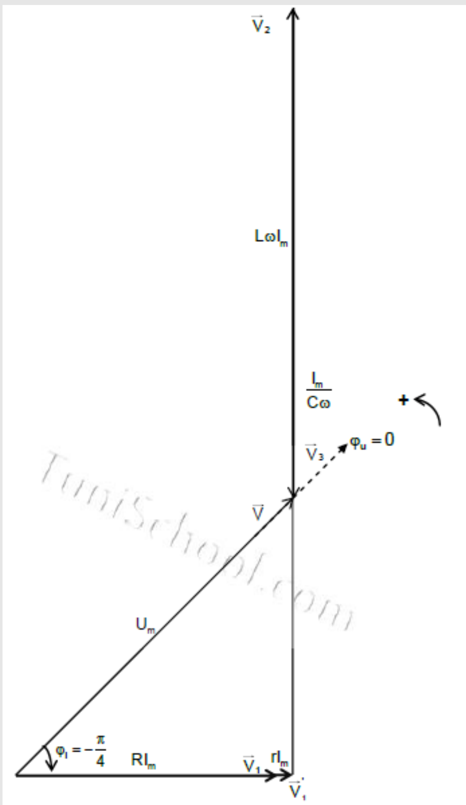
(d)

$$\Delta\phi = \frac{\tau \times 2\pi}{T} = \frac{0.2\pi \times 2\pi}{8 \times 0.2\pi} = \frac{+\pi}{4}$$

Avec T la période et τ le décalage. Le circuit est alors **inductif**.

S3. **Conseil** : avant de procéder à la construction de Fresnel, associer à chaque tension un vecteur.

$u_R(t) \rightarrow \vec{V_1}$ $(RI_m = 12V; \phi_i = -\frac{\pi}{4}rad) \Rightarrow |\vec{V_1}| = 6cm$ $(\phi_u = 0\ rad,\ 0 - \phi_i = \frac{\pi}{4})$
$u_c(t) \rightarrow \vec{V_3}$ $(\frac{I_m}{C\omega} = 22.5V; \phi_i = -\frac{\pi}{2}rad) \Rightarrow |\vec{V_3}| = 11.28cm$
$u(t) \rightarrow \vec{V}$ $(U_m = 18V; \phi_u = 0\ rad) \Rightarrow |\vec{V}| = 9cm$
Pour la bobine :
$ri(t) \rightarrow \vec{V_1}'$ $(rI_m =?; \phi_i = -\frac{\pi}{4}rad) \Rightarrow |\vec{V_1}'| =?$
$L\frac{di}{dt} \rightarrow \vec{V_2}$ $(L\omega I_m =?; \phi_i = +\frac{\pi}{2}rad) \Rightarrow |\vec{V_2}'| =?$
Avec : $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_1}' + \vec{V_2} + \vec{V_3}$



D'après la construction de fresnel :
$\vec{V_1} = 0.5cm$ donc $rIm = 0.5 \times 2 = 1V$ d'où $r = \frac{1}{0.07} = 14.28\Omega$
$\vec{V_2} = 17.6cm$ donc $L\omega I_m = 17.6 \times 2 = 35.2$ d'où $L = \frac{35.2}{2\pi N_1 I_m} = 0.4H$
car $N_1 = \frac{1}{T_1}$ et $T_1 = 8 \times 0.2\pi\ ms = 1.6\pi\ ms$

S4. **Rappel** : La puissance moyenne d'un dipôle RLC en régime sinusoïdal est $P = UI\cos\Delta\phi = (\sum R)\, I^2$ avec I : intensité efficace.

$$\begin{aligned} P = (R+r)I^2 = (R+r)\frac{I_m^2}{2} &= \frac{(R+r)}{2}\frac{U_m^2}{Z^2} \\ &= \frac{(R+r)}{2}\frac{U_m^2}{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \\ &= \frac{(R+r)}{2}\frac{U_m^2}{(R+r)^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi CN}\right)^2} \end{aligned}$$

S5. P est maximale signifie que I est maximale (à la résonance d'intensité correspond une résonance de puissance) donc,

$$\left(2\pi N_2 L - \frac{1}{2\pi C N_2}\right)^2 = 0 \ \Rightarrow\ N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 160Hz$$

S6.

$$P_2 = \frac{(R+r)}{2}\frac{U_m^2}{(R+r)^2 + 0} = \frac{U_m^2}{2(R+r)} = 0.88W$$

S7. $N = N2$ nous sommes à la résonance d'intensité :

$$i(t) = I_m \sin(\omega_2 t + \phi_i)$$

Tel que $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase d'où $\phi_i = \phi_u = 0$ et $I_m = U_{max}/Z_{min} = U_{max}/(R+r) = 0.098A$
Donc,

$$i(t) = 0.098\sin(320\pi t)$$

S8. **Rappel** : Le voltmètre mesure la tension efficace

$$Z_{DN} = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}^2\right)}$$

dans ces conditions,

$$L\omega - \frac{L}{C\omega} = 0$$

d'où

$$Z_{DN} = r \quad \text{donc} \quad U_{DN} = rI = r\frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 1V$$

Exercice 3

Soit un circuit électrique comprenant deux condensateurs C_1 et C_2, une résistance R et une inductance L. Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $u(t)$ d'amplitude de 110 V, de pulsation ω et de période $T = 1/100\ s$.

Q1. Quelle est l'impédance complexe de ce circuit ?

Q2. Trouver l'angle de déphasage entre le courant et la tension

Q3. Donner les expressions des tensions U_L, U_R, et U_{C1+C2}.

Q4. Pour quelle valeur de C_1 observe-t-on la résonance, si $C_2 = 5\mu F$ et $L = 3H$?

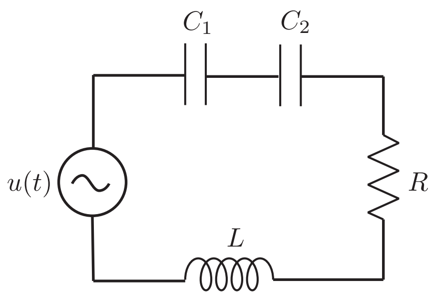


FIGURE 4 – Circuit RLC série avec double C

Solution:

S1. L'impédance complexe du circuit,

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Soit,

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 \omega}\right)$$

S2. Comme $\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}$, le déphasage ϕ entre le courant et la tension est,

$$\phi = -\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\frac{LC_1C_2\omega^2 - (C_1 + C_2)}{RC_1C_2\omega}\right)$$

S3. Les tension U_L , U_R et $U_{C_1+C_2}$ sont données par,

$$U_L = Z_L I = L\omega I \quad ; \quad U_R = RI \quad ; \quad U_{C_1+C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2\omega} I$$

où I est l'amplitude du courant $i(t)$ qui circule dans le circuit. avec,

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{C_1+C_2}{C_1C_2\omega}\right)^2}}$$

soit,

$$U_L = \frac{L\omega U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{C_1+C_2}{C_1C_2\omega}\right)^2}}$$

$$U_R = \frac{RU}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{C_1+C_2}{C_1C_2\omega}\right)^2}}$$

$$U_{C_1+C_2} = \frac{(C_1 + C_2)U}{C_1 C_2 \omega \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{C_1+C_2}{C_1 C_2 \omega}\right)^2}}$$

S4. A la résonance, le circuit se comporte comme une résistance pure.
Pour réaliser cette condition on annule la partie imaginaire de l'impédance complexe $\underline{Z}$, soit donc,

$$L\omega - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 \omega} = 0$$

Ce que permet de déterminer la valeur de C_1. Compte tenu de l'équation ci-dessus :

$$C_1 C_2 L\omega^2 = C_1 + C_2$$
$$C_1(C_2 L\omega^2 - 1) = C_2$$

soit,

$$C_1 = \frac{C_2}{C_2 L\omega^2 - 1}$$

A.N

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \ rad/s \quad , \quad L = 3 \ H \quad , \quad C_2 = 5.10^{-6} \ F \quad , \quad C_1 = 1.02 \ \mu F$$