# Algèbre 1 :

## Résumé du chapitre 1 :

## Loi de composition interne :

. Soit $E$ un ensemble, on dit que $\star$ est LCI sur $E$ ssi :

$$\forall (x,y) \in E^2 : \quad x \star y \in E$$

**Propriétés :**
. L'associativité : $\forall (x,y,z) \in E^3 : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$
. La commutativité : $\forall (x,y) \in E^2 : x \star y = y \star x$
. La distributivité : On dit que $\star$ est distributive par rapport à $\top$ si :

$$\begin{cases} a \star (b \top c) & = (a \star b) \top (a \star c) \\ (b \top c) \star a & = (b \star a) \top (c \star a) \end{cases}$$

On définit ainsi la notion du magma qui est tout simplement un ensemble $E$ muni d'une LCI $\star$, on le note $(E, \star)$.
**Les éléments particuliers :** Soit $(E, \star)$ un magma :
Élément régulier : $a$ est régulier de $E$ ssi :

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \Longrightarrow x = y \\ x \star a = y \star a \Longrightarrow x = y \end{cases}$$

Élément neutre : $e$ est neutre de $E$ ssi :

$$\begin{cases} x \star e = x \\ e \star x = x \end{cases}$$

Ce dernier s'il existe il est unique.
Élément symétrique : $y$ symétrique de $x$ dans $E$ ssi :

$$\begin{cases} x \star y = e \\ y \star x = e \end{cases}$$

On le note $\mathrm{sym}(x)$, ce dernier s'il existe il est unique.

$\mathrm{sym}(\mathrm{sym}(x)) = x \quad ; \quad \mathrm{sym}(x \star y) = \mathrm{sym}(y) \star \mathrm{sym}(x) \quad ; \quad x$ est symétrisable $\Rightarrow x$ est régulier

## Groupe :

On appelle un ensemble $G$ muni de la LCI $\star$ un groupe ssi :
- . $\star$ est associative.
- . $(G, \star)$ admet un élément neutre $e$.
- . Tout les éléments de $(G, \star)$ est symétrisable.

La loi $\star$ n'est pas forcément commutatif, mais si cette condition est vérifiée le groupe est appelé

abélien.
**Sous groupe :** Soit $(G,\star)$ un groupe d'élément neutre $e$;
$(H,\star)$ est un sous groupe de $(G,\star)$ ssi :
. $e \in H$
. $\forall x \in H : \mathrm{sym}(x) \in H$
. $\forall (x,y) \in H^2 : x \star y \in H$
On peut caractériser le sous groupe $(H,\star)$ en montrant que :

$$e \in H \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in H^2 : x \star \mathrm{sym}(y) \in H$$

# Morphisme de groupe :

On appelle le morphisme du groupe $(G,\star)$ vers $(G',\top)$ toute application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G' \\ f(x\star y) & = & f(x)\top f(y) \end{array}$$

. Si $f$ est bijective, il est appelé isomorphisme.
. Si $(G,\star) = (G',\top)$, alors $f$ est appelé endomorphisme.
. Si $f$ est isomorphisme et endomorphisme, alors il est appelé automorphisme.
**Propriétés :** Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe.
. Si $H$ est sous groupe de $(G,\star)$, alors $f(H)$ est sous groupe de $(G',\top)$.
. Si $H'$ est sous groupe de $(G',\top)$, alors $f^{-1}(H)$ est un sous groupe de $(G,\star)$.
. Si $e$ et $e'$ sont respectivement les éléments neutres de $G$ et $G'$, alors $f(e) = e'$.
**Noyau et image :**
. On appelle image de $f$, l'ensemble $\mathrm{Im}f = f(G)$, c'est un sous groupe de $(G',\top)$.
. On appelle noyau de $f$, l'ensemble $\mathrm{Ker}f = \{x \in G | f(x) = e'\}$, c'est un sous groupe de $(G,\star)$.
. $f$ est injective ssi $\mathrm{Im}f = G'$.
. $f$ est surjective ssi $\mathrm{Ker}f = \{e\}$.

# Groupe symétrique :

Le groupe symétrique, est l'ensemble des permutation $\sigma$ d'un ensemble fini $E = \{1,2,\dots,n\}$(on le note $S_n$), muni de la loi $\circ$. Son élément neutre est Id. À noter que ce groupe $(S_n,\circ)$ n'est pas commutatif si $n \geq 3$.
Pour visualiser l'action de $\sigma$ on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

**Orbite d'un élément :** Soit $\sigma$ une permutation de $S_n$ et $k \in \{1,\dots,n\}$. On appelle orbite de $k$ l'ensemble $\left\{\sigma^p(k) \mid p \in \mathbb{N}\right\}$.
**Transposition :** On appelle transposition $\tau_{ij}$ de $i$ et $j$ la permutation définie par $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ et $\forall k \neq i,j$ on a $\tau_{ij}(k) = k$
**Le cycle :** On dit qu'une permutation $\sigma$ est $p$-cycle si : $\forall p \in \mathbb{N} : 2 \leq p \leq n$ On a : $\{a_1,a_2,\dots,a_p\} \subset \{1,2,\dots,n\}$

$$\sigma(a_1) = a_2 \;;\; \sigma(a_2) = a_3 \;\; \dots \;\; \sigma(a_p) = a_1 \text{ Et } \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{a_1,a_2,\dots,a_p\} : \sigma(i) = i$$

On note que $\sigma^p = \mathrm{Id}$.
**La signature d'une permutation :** Soit $\sigma$ une permutation la signature de $\sigma$, notée $\varepsilon(\sigma) = (-1)^D = (-1)^I$, où : $D$ est la différence entre $n$ et le nombre des orbites. $I$ le nombre de couple $(i,j)$ tq $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Si $\varepsilon(\sigma) = 1$ la signature est paire, sinon elle est impaire.

# Anneau :

$(A, \top, \star)$ est un anneau ssi :

$$\begin{cases} (A, \top) \text{ Est un groupe abélien} \\ (A, \star) \text{ Est un monoïde} \\ \star \text{ est distrubutive par rapport à } \top \end{cases}$$

Si de plus $\star$ est commutatif alors $(A, \top, \star)$ est un anneau commutatif.
**Sous-anneau :** Soit $B \subset A$, on appelle sous-anneau de $A$ toute partie $B$ tq :

$$\begin{cases} e_\star \in B \\ \forall x, y \in B : x \top \mathrm{sym}_\top(y) \in B \\ \forall x, y \in B : x \star y \in B \end{cases}$$

**Les règles de calcul dans $(A, +, \times)$ :** Les éléments neutres sont $e_+ = 0$ et $e_\times = 1$.
Soit $(a, b) \in A$ et $p \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} 0 \times a &= a \times 0 &= 0 \\ (-a)b &= -(ab) &= a(-b) \\ (pa)b &= p(ab) &= a(pb) \end{cases}$$

On introduit le binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

**Diviseurs de zéro :** Soit $a \in A$ tq $a \neq 0$, on dit que $a$ est un diviseur de zéro ssi : $\exists b \in A \setminus \{0\}$ tq : $ab = ba = 0$, ce dernier s'il existe est non régulier pour la loi $\times$.
Généralement, dans $(A, \top, \star)$ les diviseurs de zéros vérifient :

$$\forall a, b \neq e_\top : a \star b = b \star a = e_\top$$

L'anneau intègre, est tout anneau commutatif non réduit à $\{e_\top\}$ sans diviseurs de zéro, c-à-d :

$$\forall (x, y) \in A^2 : (x \star y = e_\top \Rightarrow x = e_\top \quad \text{ou} \quad y = e_\top$$

**Morphisme d'anneau :** Soient $(A, \top, \star)$ et $(A', \perp, *)$ deux anneaux, on appelle morphisme d'anneau toute application $f : A \longrightarrow A'$ tq :

$$\begin{cases} f(e_\star) &= e_* \\ f(x \top y) &= f(x) \perp f(y) \\ f(x \star y) &= f(x) * f(y) \end{cases}$$

# Corps :

$(K, \top, \star)$ est un corps ssi :
.$(K, \top, \star)$ est un anneau intègre.
.$(K \setminus \{e_\top\}, \star)$ est groupe abélien.
**Sous-corps :** Soit $L \subset K$ :
$(L, \top, \star)$ est un sous corps de $(K, \top, \star)$ ssi :
. $L$ est un sous anneau de $(K, \top, \star)$.
. $\forall x \in L \setminus \{e_\top\}$ on a $\mathrm{sym}(x) \in L$.

Bonne chance :D <3