Plan

1. **FILTRES DU PREMIER ORDRE**
   - Etude des filtres de premier ordre

Expression de la fonction de transfert

Le dénominateur de la fonction de transfert $\underline{H}$ d'un filtre du premier ordre est un polynôme du premier degré en $j\omega$. Pour étudier cette fonction, on pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$$

Avec ω_{ref} et la pulsation de référence du circuit
L'écriture la plus générale de la fonction de transfert $\underline{H}$ d'un filtre du premier ordre en fonction de la variable x est alors :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}(jx)}{1 + jx}$$

où $\underline{N}(jx)$ est un polynôme en jx de degré inférieur ou égal à 1.

Filtre passe-bas

Fonction de transfert

Propriété

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx} \quad , \quad \text{Avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$$

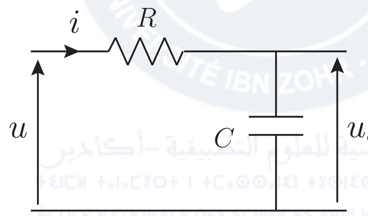
Exemple

La fonction de transfert du filtre RC :

$H(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$

En prenant $\omega_{ref} = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_{ref}$, il vient :

$$H(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$



Filtre passe-bas

Fréquence de coupure – bande passante

L'amplification en tension H d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$H(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}}$$

La fonction $H(x)$ décroît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x = 0$ et on a alors $H_{max} = H_0$. La pulsation de coupure ω_c vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x_c^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{avec} \quad x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{ref}}$$

On en déduit : $x_c = 1$ soit :

$$\omega_c = \omega_{ref} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{ref}}{2\pi}$$

Filtre passe-bas

Fréquence de coupure – bande passante

Propriété

La bande passante d'un filtre passe-bas du premier ordre vaut :

$$BP(f) = \left[0, f_c = \frac{\omega_{ref}}{2\pi}\right]$$

où ω_{ref} est la pulsation de référence du circuit.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filtre passe-bas

Étude du gain

Le gain en tension G d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x:

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) - 10\log(1 + x^2)$$

La fonction $G(x)$ décroît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x = 0$, et on a alors :

$$G_{max} = G(0) = 20\log(H_0)$$

Filtre passe-bas

Étude du gain

Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de G quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$

- Pour $x = x_c = 1$. on a $H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ et $G(x_c) = G_{max} - 3dB$
- Quand $x \to 0$, alors $H(x) \to H_0$ et $G(x) \to 20\log(H_0) = G_{max}$
  $\Rightarrow$ Aux basses fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale.
- Quand $x \to +\infty$, alors $H(x) \to \frac{H_0}{x}$ et
  $G(x) \to 20\log(H_0) - 20\log(x) = G_{max} - 20\log(x)$
  $\Rightarrow$ Aux hautes fréquences, le gain G tend vers la droite $G_{max} - 20\log(x)$. En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente –20 dB/décade. Les deux courbes asymptotes se coupent en $x = x_c = 1$

Filtre passe-bas

Étude du phase

La phase ϕ d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

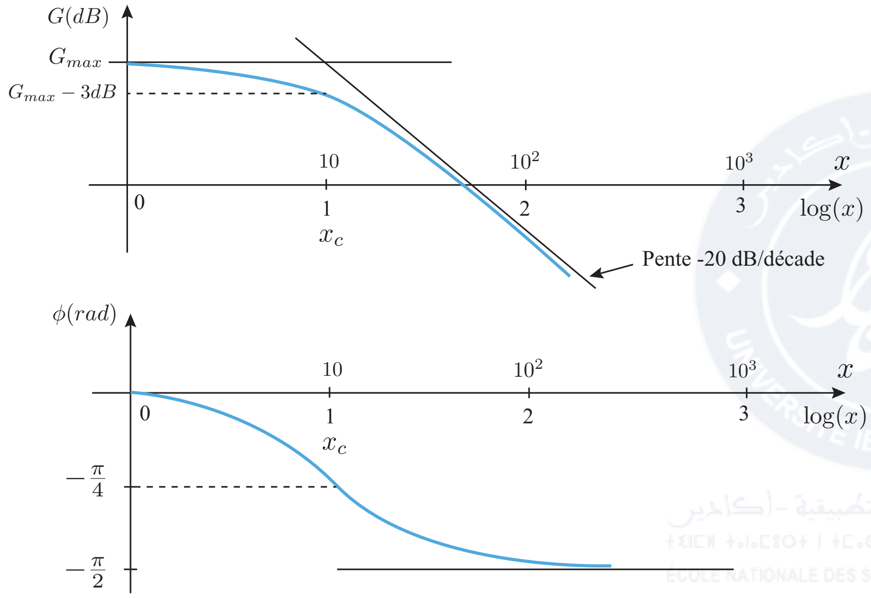
$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arg(\underline{D}(jx)) = -\arctan(x)$$

Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de ϕ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$

- Pour $x = x_c = 1$. on a $\phi(x_c) = -\pi/4$
- Quand $x \to 0$, alors $\phi(x) \to 0$
  $\Rightarrow$ Aux basses fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale.
- Quand $x \to +\infty$, alors $\phi(x) \to -\pi/2$
  $\Rightarrow$ Aux hautes fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

Filtre passe-bas

Diagramme de Bode



Filtre passe-haut

Fonction de transfert

Propriété

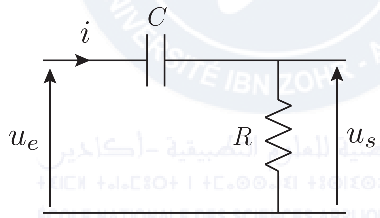
La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0 jx}{1 + jx} \quad , \quad \text{Avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$$

Exemple

La fonction de transfert du filtre CR :
$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$
En prenant $\omega_{ref} = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_{ref}$, il vient :

$$H(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$$



المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية- أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filtre passe-haut

Fréquence de coupure – bande passante

L'amplification en tension H d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$H(x) = \frac{H_0 x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

La fonction $H(x)$ croît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x \to \infty$ et on a alors $H_{max} = H_0$. La pulsation de coupure ω_c vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x_c^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{avec} \quad x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{ref}}$$

On en déduit : $x_c = 1$ soit :

$$\omega_c = \omega_{ref} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{ref}}{2\pi}$$

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية- أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filtre passe-haut

Fréquence de coupure – bande passante

Propriété

La bande passante d'un filtre passe-haut du premier ordre vaut :

$$BP(f) = \left[f_c = \frac{\omega_{ref}}{2\pi}, +\infty\right]$$

où ω_{ref} est la pulsation de référence du circuit.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filtre passe-haut

Étude du gain

Le gain en tension G d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x:

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) + 20\log(x) - 10\log(1+x^2)$$

La fonction $G(x)$ croît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x \to \infty$, et on a alors :

$$G_{max} = G(0) = 20\log(H_0)$$

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filtre passe-haut

Étude du gain

Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de G quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$

- Pour $x = x_c = 1$. on a $H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ et $G(x_c) = G_{max} - 3dB$
- Quand $x \to 0$, alors $H(x) \to H_0 x$ et $G(x) \to 20\log(H_0) + 20\log(x) = G_{max} + 20\log(x)$
  $\Rightarrow$ Aux basses fréquences, le gain G tend vers la droite $G_{max} + 20\log(x)$. En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente +20 dB/décade.
- Quand $x \to +\infty$, alors $H(x) \to H_0$ et $G(x) \to 20\log(H_0) = G_{max}$
  $\Rightarrow$ Aux hautes fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale. Les deux courbes asymptotes se coupent en $x = x_c = 1$

Filtre passe-haut

Étude du phase

La phase ϕ d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(\underline{N}(jx)) - \arg(\underline{D}(jx)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de ϕ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$

- Pour $x = x_c = 1$. on a $\phi(x_c) = \pi/4$
- Quand $x \to 0$, alors $\phi(x) \to \frac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow$ Aux basses fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale.
- Quand $x \to +\infty$, alors $\phi(x) \to 0$
  $\Rightarrow$ Aux hautes fréquences, L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

Filtre passe-haut

Diagramme de Bode