Électrocinétique 2

Cours

Pr. Marouane EL AZZAOUI

m.elazzaoui@uiz.ac.ma

Année universitaire 2019/2020

Plan

1. **RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT**

Plan

1. **Régime sinusoïdal permanent**
   - Grandeurs caractéristiques des signaux périodiques
   - Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux
   - Notation complexe d'un signal périodique
   - Notion d'impédance en régime sinusoïdal permanent
   - Puissance en régime sinusoïdal permanent
   - Résonance

Définitions

- **Période T** en (s): temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction.
  (A.N. $T = 2\ s$)
- **Fréquence f** en (Hz) correspond au nombre de périodes par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \qquad (1.1)$$

A.N. $f = 0.5\ Hz$

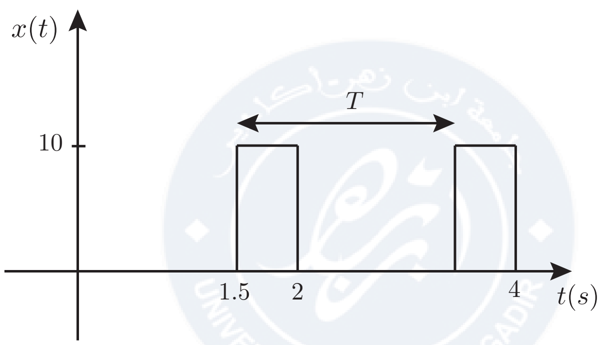


Fig: Signal périodique

Définitions

- **Pulsation** ω : la valeur de la fréquence angulaire. Elle est définie par :

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \qquad (1.2)$$

A.N. $\omega = 3.1416\ rad/s$

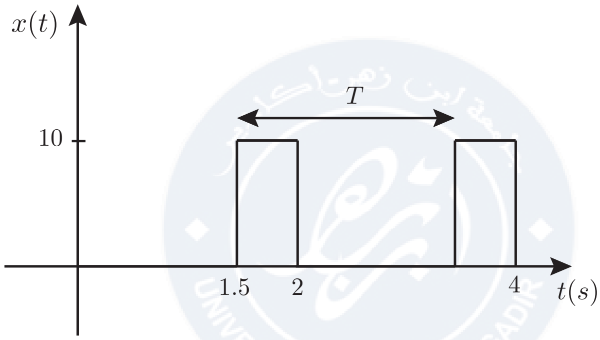


FIG: Signal périodique

Définitions

- **Valeur moyenne** : On note $< x >$ la valeur moyenne dans le temps du signal $x(t)$:

$$\boxed{< x >= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt} \qquad (1.3)$$

A.N. $< x >= \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$

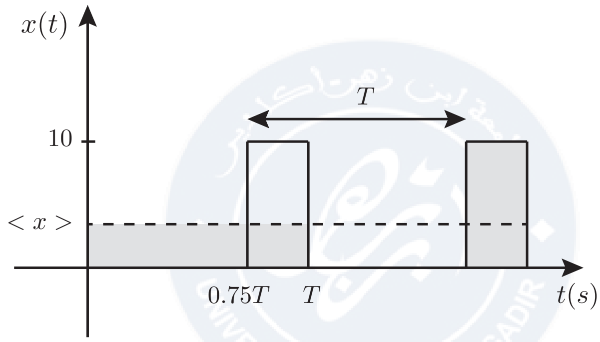


FIG: Signal périodique

Définitions

- **Valeur efficace** (Root Mean Square (RMS)) : Par définition, la valeur efficace X_{eff} du signal $x(t)$ est :

$$\boxed{X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}} \qquad (1.4)$$

A.N. $X_{eff} = \sqrt{100 \times \frac{1}{4}} = 5$

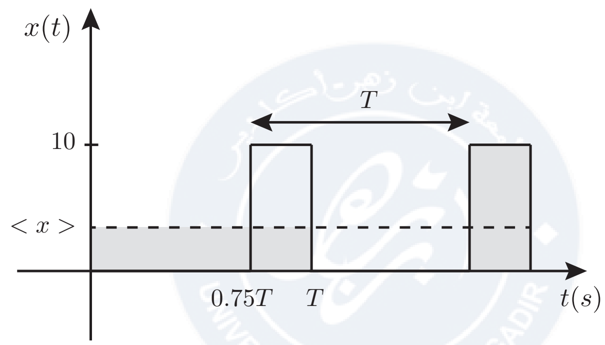


FIG: Signal périodique

Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

- Il a la forme suivante :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.5)$$

Avec,

X_m : amplitude du signal
ω : Pulsation en rad/s
$\omega t + \phi$: est la phase instantanée
ϕ : phase à l'origine des dates en rad

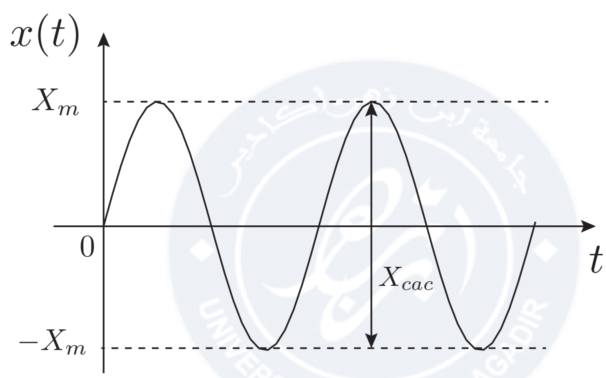


FIG: Signal sinusoïdal

Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

Remarque

1. On peut utiliser la fonction *cosinus* au lieu de *sinus*
2. L'amplitude ne doit pas être confondue avec le signal crête-crête ($X_{cac} = 2X_m$)

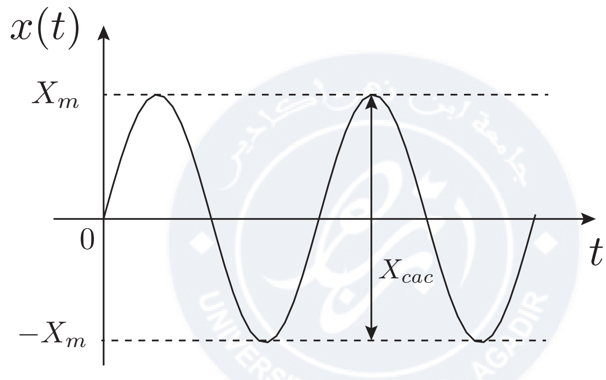


FIG: Signal sinusoïdal

RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT
Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Définition

Le déphasage est la différence de phase à l'origine des signaux étudiés

Le déphasage entre V_s et V_e est donné par :

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\tau \times 2\pi}{T}} \quad (1.6)$$

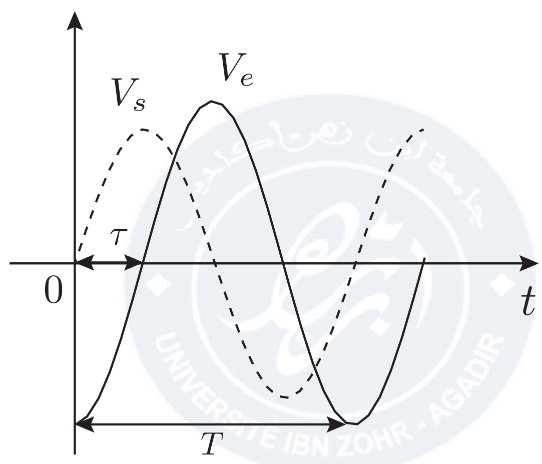


FIG: Exemple de déphasage positif

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

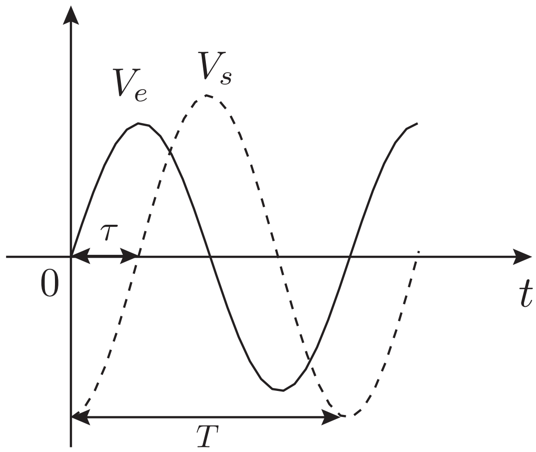


FIG: Exemple de déphasage négatif

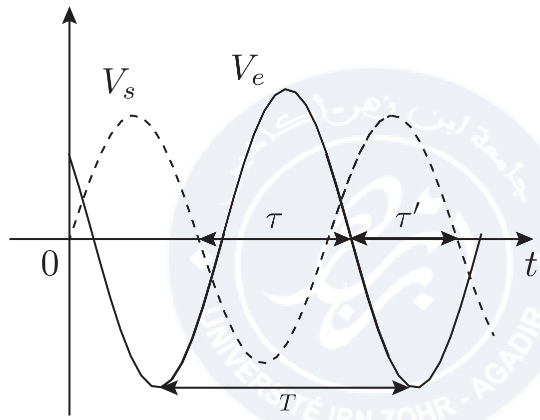


FIG: Exemple de déphasage supérieure à π

Rappels mathématiques

La forme cartésienne d'un nombre complexe :

$$z = a + jb \tag{1.7}$$

Le module de z noté $|z|$ a pour expression :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.8}$$

Son argument θ est défini par :

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.9}$$

La forme polaire d'un nombre complexe :

$$z = r(cos\theta + jsin\theta) = re^{j\theta} \tag{1.10}$$

Avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module et θ son argument.

Rappels mathématiques

Soit un signal sinusoïdal :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \tag{1.11}$$

On lui associe une grandeur complexe

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\phi} \tag{1.12}$$

L'amplitude complexe :

$$\underline{X} = X_m e^{j\phi} \Rightarrow \qquad \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t} \tag{1.13}$$

On travaillera donc en notation complexe mais il sera facile de revenir au signal réel :

$$x(t) = \Re(\underline{x}(t)) \tag{1.14}$$

$$X_m = |\underline{X}| \tag{1.15}$$

$$\phi = \arg(\underline{X}) \tag{1.16}$$

Exemple

Exemple

Soient deux courants sinusoïdaux :

$$i_1(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i_2(t) = 4\sin\left(2t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

1. Écrire l'amplitude complexe $\underline{I}_m$ de la somme $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$
2. Donner l'expression de $i(t)$

Exemple

Exemple (Suite..)

Solution

1. L'amplitude complexe de $i_1(t)$ est $\underline{I}_{1m} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$
   Il faut transformer $i_2(t)$ sous la forme : $i_2(t) = 4\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2t + \frac{5\pi}{4}\right)\right]$
   Son amplitude complexe est $4e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}\right)}$ soit $4e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
   $\underline{I}_m = 2e^{j\frac{\pi}{4}} + 4e^{-j\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$
   $\Rightarrow |\underline{I}_m| = 2$
   $\Rightarrow \underline{I}_m = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{j\frac{5\pi}{4}}$
2. $i(t) = 2cos\left(2t + \frac{5\pi}{4}\right)$

Représentation de Fresnel

A la grandeur $x(t) = X_m\cos(\omega t + \phi)$, on associe dans le plan complexe un vecteur de longueur X_m et dont l'angle avec l'axe horizontal est $\omega t + \phi$.

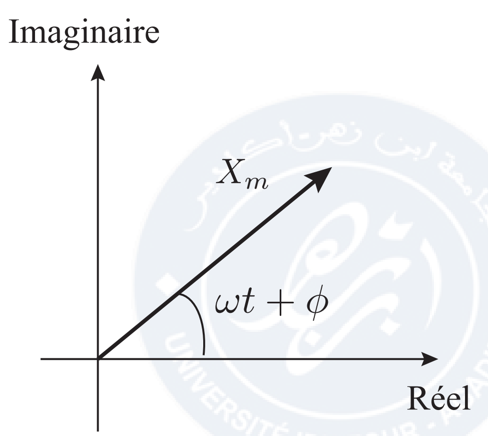


FIG: Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

Exemple

Exemple

Soient les trois tensions sinusoïdales de même pulsation :
$u_1(t) = 2\cos(3t)$; $u_2(t) = 2\cos(3t + \frac{\pi}{2})$; $u_3(t) = 2\sqrt{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$

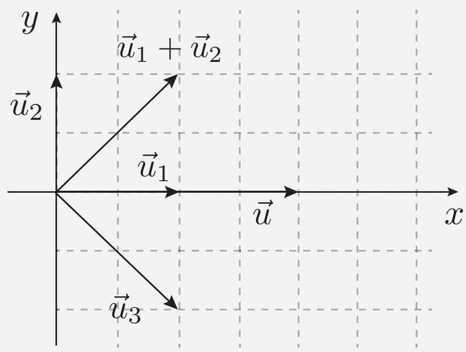
1. Placer, dans le repère orthonormé xOy , les vecteurs associés à $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$.
2. Faire la somme vectorielle $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3}$.
   - 2.1 Quelle est la norme de $\vec{u}$?
   - 2.2 Quel angle fait $\vec{u}$ avec l'axe Ox ?
3. En déduire la tension sinusoïdale $u(t)$ associée à $\vec{u}$

Exemple

Exemple (Suite..)

Solution

1. Le diagramme de Fresnel est présenté ci-contre,
2. 2.1 Norme de $\vec{u}$: 4
   2.2 Angle que fait avec l'axe Ox: $0 rad$
3. $u(t) = 4\cos(3t)$



Dérivation de signaux complexes

La présence d'une exponentielle en notation complexe facilite la dérivation du signal :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \left(X_m e^{j(\omega t+\phi)}\right)' = j\omega X_m e^{j(\omega t+\phi)} \quad (1.17)$$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)} \quad (1.18)$$

Règle

La dérivée d'un signal complexe est obtenue en multipliant ce signal par $j\omega$

RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT
└Notation complexe d'un signal périodique

Intégration de signaux complexes

Sur le même principe, la primitive d'un signal complexe est obtenue:

$$\int \underline{x}(t) = \int X_m e^{j(\omega t+\phi)} = \frac{1}{j\omega} X_m e^{j(\omega t+\phi)} \quad (1.19)$$

$$\boxed{\int \underline{x}(t) = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)} \quad (1.20)$$

Règle

L'intégral d'un signal complexe est obtenue en divisant ce signal par $j\omega$

Exemple

Exemple

Calculer la dérivée du courant suivant : $i(t) = 3\cos(2t + \frac{\pi}{4})$

Solution

$$\underline{i}(t) = 3e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j2\underline{i}(t) = j2 \times 3e^{j(2t+\frac{\pi}{4})} = j6\left[\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -6\sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

Dipôles simples, relation entre courant et tension

Conducteur Ohmique

Soit un conducteur parcouru par un courant $i(t) = I_m\cos(\omega t)$ en appliquant la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} u(t) &= Ri(t) = RI_m\cos(\omega t) \\ &= U_m\cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (1.21)$$

D'où les relations :

$$U_m = RI_m \quad ; \quad \phi = 0 \quad (1.22)$$

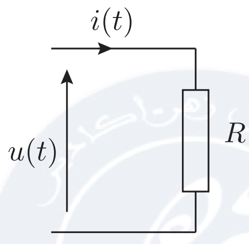


FIG: Conducteur parcouru par un courant

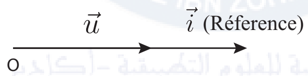


FIG: Représentation vectorielle

Dipôles simples, relation entre courant et tension

Bobine

En appliquant la loi de Lenz :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (1.23)$$

Puisque $\Phi = Li$, il vient :

$$e = -L\frac{di}{dt} \qquad (1.24)$$

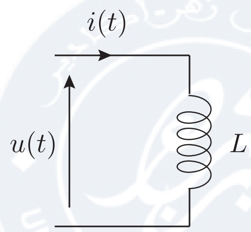


FIG: Bobine parcourue par un courant

Dipôles simples, relation entre courant et tension

Bobine

Si le courant est donné par $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, et comme la convention de signe choisie $u = -e$, il vient :

$$u(t) = -L\omega I_m \sin(\omega t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (1.25)$$

Avec,

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (1.26)$$

Par identification, on trouve,

$$U_m = L\omega I_m \quad ; \quad \phi = \frac{\pi}{2} \qquad (1.27)$$

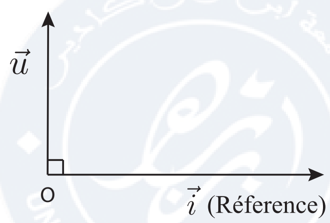


FIG: Représentation vectorielle

Dipôles simples, relation entre courant et tension

Condensateur

Appliquant aux borne d'un condensateur C une tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$, la charge du condensateur est donnée par :

$$q(t) = CU_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (1.28)$$

D'où l'intensité du courant dans le circuit :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -CU_m \omega \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.29)$$

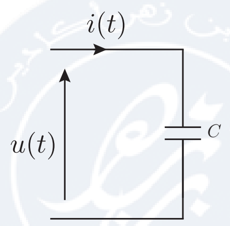


FIG: Condensateur parcouru par un courant

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Dipôles simples, relation entre courant et tension

Condensateur

Avec,

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) = -I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad (1.30)$$

Par identification, il vient:

$$U_m = \frac{I_m}{C\omega} \quad ; \quad \phi = -\frac{\pi}{2} \qquad (1.31)$$

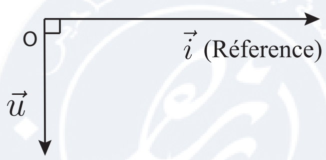


FIG: Représentation vectorielle

Dipôles simples, notion d'impédance

Nous appellerons impédance Z le facteur de proportionnalité :

$$U_m = ZI_m \tag{1.32}$$

Avec Z s'exprime en Ohm (Ω) En notation complexe :

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j\omega t}$$

$$\frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\phi} = Ze^{j\phi} = \underline{Z} \tag{1.33}$$

Dipôles simples, notion d'impédance

On peut aussi écrire :

$$\underline{Z} = R + jX \tag{1.34}$$

R, est la partie réel ou résistance du dipôle,
X, est la partie imaginaire ou réactance
Ces deux grandeurs s'expriment en ohms (Ω). De l'équation (1.34), il vient,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad ; \quad \phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \tag{1.35}$$

Impédance de dipôles en série

Les tensions complexes aux bornes de deux dipôles en série :

$$\underline{u}_1(t) = \underline{Z}_1 \times \underline{i}(t) \quad ; \quad \underline{u}_2(t) = \underline{Z}_2 \times \underline{i}(t)$$

Alors,

$$\underline{u}(t) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{i}(t)$$

Règle

L'impédance complexe de dipôles associés en série est égale à la somme de leurs impédances complexes

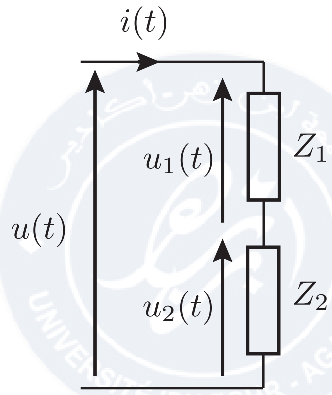
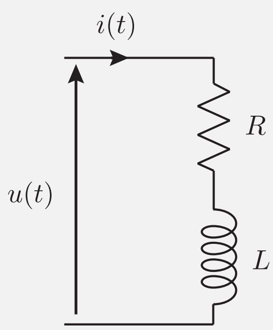


FIG: Dipôles en série

Exemple

Exemple

Soit le circuit RL ci-contre, déterminer son impédance et le déphasage entre la tension et le courant.



Exemple

Exemple (Suite..)

Solution
L'impédance complexe de la résistance : $\underline{Z} = R$
L'impédance complexe de la bobine : $\underline{Z} = jL\omega$
Donc impédance complexe du circuit est leur somme, soit : $\underline{Z} = R + jL\omega$
D'où l'impédance du dipôle équivalent :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

et le déphasage entre tension et courant :

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Dipôles en parallèle, notion d'admittance

Plusieurs dipôles en parallèle ont la même tension aux bornes :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}_1\underline{i}_1(t) = \underline{Z}_2\underline{i}_2(t) = ... = \underline{Z}_n\underline{i}_n(t)$$

On utilise l'inverse de l'impédance complexe, appelée admittance complexe et notée $\underline{Y}$.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jH \qquad (1.36)$$

Avec,
G : la conductance du dipôle en siemens (S)
H : la susceptance du dipôle en siemens (S)

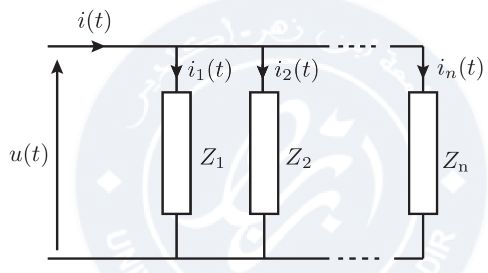


Fig: Dipôles en parallèle

Dipôles en parallèle, notion d'admittance

On peut aussi mettre l'admittance sous la forme :

$$\underline{Y} = Ye^{-j\phi} \qquad (1.37)$$

Avec,
$Y = \sqrt{G^2 + H^2}$ est l'amplitude de l'admittance.
$\phi = -\arctan(H/G)$ est le déphasage.

Avec cette notation, l'intensité dans une des branches du diviseur de courant va s'exprimer par :

$$\underline{i}_n = \underline{Y}_n \underline{u} \qquad (1.38)$$

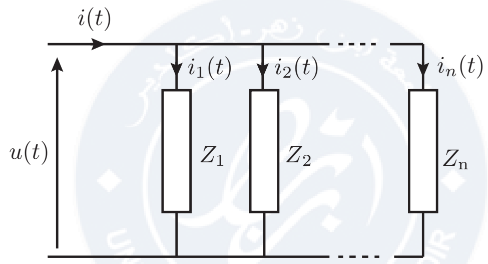


FIG: Dipôles en parallèle

Dipôles en parallèle, notion d'admittance

L'intensité du courant dans le circuit principal vérifie la relation :

$$i(t) = \sum_n i_n(t)$$

$$\underline{i} = \sum_n \underline{i}_n = \sum_n \underline{Y}_n \underline{u} = \left(\sum_n \underline{Y}_n\right) \underline{u}$$

L'admittance complexe totale, $\underline{Y} = \sum_n \underline{Y}_n$

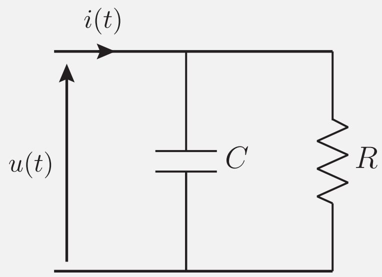
Régle

L'admittance complexe du dipôle équivalent à une association de dipôles en parallèle est égale à la somme des admittances complexes

Exemple

Exemple

Soit le circuit RC ci-contre, déterminer son admittance et le déphasage entre la tension et le courant



Exemple

Exemple

Solution

L'admittance complexe de la résistance :

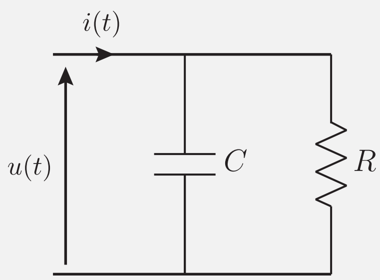
$$\underline{Z}_1 = R \Rightarrow \underline{Y}_1 = \frac{1}{R}$$

L'admittance complexe du condensateur :

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \underline{Y}_2 = jC\omega$$

L'admittance complexe totale :

$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$



Exemple

Exemple

D'où l'admittance du dipôle équivalent :

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}$$

Le courant est en avance de phase de la tension ($\underline{i} = \underline{Y}\underline{u}$) par l'angle :

$$\arg(\underline{Y}) = \arctan\left(\frac{C\omega}{1/R}\right) = \arctan(RC\omega)$$

Donc la tension est retard de phase par rapport au courant par l'angle :

$$\arg(\underline{Y}) = -\arctan(RC\omega)$$

Puissance instantanée

Soit un dipôle parcouru par un courant sinusoïdal d'expression :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \tag{1.39}$$

et alimenter par une tension dont la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi) \tag{1.40}$$

On appelle **puissance instantanée** le produit de la tension et courant :

$$p(t) = u(t) \times i(t) = U_m \cos(\omega t + \phi) \times I_m \cos(\omega t) \tag{1.41}$$

Puissance instantanée

en appliquant la relation :

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \qquad (1.42)$$

il vient :

$$p(t) = \frac{1}{2}U_m I_m\left[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi\right] \qquad (1.43)$$

$p(t)$ est une fonction sinusoïdale possédant :

- une composante alternative : $\frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t + \phi)\right]$ de pulsation 2ω donc de période $T/2$
- une composante continue : $\frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(\phi)\right]$

Puissance instantanée

la courbe de puissance est représentée à la figure ci-contre

On observe que la puissance instantanée oscille à une fréquence double de celle du courant, entre les deux valeurs : $(1/2)U_m I_m(\cos\phi + 1)$ et $(1/2)U_m I_m(\cos\phi - 1)$

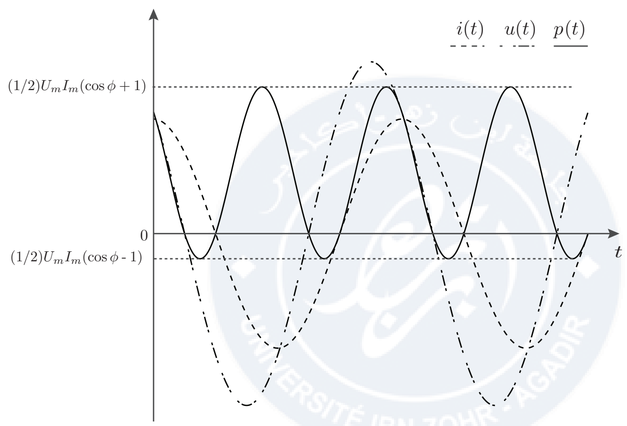


FIG: Courbe de puissance

Puissance moyenne et facteur de puissance

La puissance moyenne est définie par :

$$< p(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \tag{1.44}$$

La moyenne sur une période de $\cos(2\omega t + \phi)$ étant nulle, il vient :

$$P =< p(t) >= \frac{1}{2}U_m I_m \cos\phi \tag{1.45}$$

soit, en utilisant les valeurs efficaces, $U = U_m/\sqrt{2}$; $I = I_m/\sqrt{2}$,

$$P = UI\cos\phi \tag{1.46}$$

Puissance moyenne et facteur de puissance

- la puissance moyenne s'exprime en watts (W)
- Le produit UI est appelé **puissance apparente** et s'exprime en voltampères (VA)
- Le terme $\cos\phi$ est appelé **facteur de puissance** du dipôle.

Remarque

Comme $U = ZI$ et $R = Z\cos\phi$, on peut exprimer la puissance par $P = RI^2$

Puissance complexe

La puissance moyenne consommée dans un circuit passif est :

$$P = RI^2 = R\frac{I_m^2}{2} \tag{1.47}$$

Pour exprimer ce résultat à partir de l'expression complexe $\underline{i}(t) = I_m e^{j\omega t}$, il faut :

$$P = R\frac{\underline{i}(t)\underline{i}(t)^*}{2} \tag{1.48}$$

où $\underline{i}(t)^*$ est le nombre complexe conjugué de $\underline{i}(t)$. Par analogie, on appelle puissance complexe dans un dipôle :

$$\underline{p} = \frac{\underline{u}.\underline{i}^*}{2} = \frac{\underline{Z}.\underline{i}.\underline{i}^*}{2} = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2 \tag{1.49}$$

on voit que P est la partie réelle de $\underline{p}$. On pose $\underline{p} = P + jQ$
P est appelé partie active de la puissance, et $Q = XI^2$ est la partie réactive.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية- أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Exemple

Enoncé

Un dipôle R-C en série est soumis à une tension sinusoïdale de valeur efficace 20 V et de fréquence 1 kHz. L'intensité efficace du courant qui le traverse vaut 400 mA.

1. Sachant que $R = 22\ \Omega$, calculer la puissance dissipée dans ce dipôle.
2. En déduire le facteur de puissance.
3. Calculer la valeur de C.

Exemple (suite..)

Solution

1. Toute la puissance est dissipée, par effet Joule, dans la partie résistive du circuit : $P = RI^2 = 3.52\ W$
2. Dans un dipôle, en régime sinusoïdal permanent, la puissance a aussi pour expression : $P = UI \cos\phi$.
   d'où le facteur de puissance : $\cos\phi = \frac{P}{UI} = 0.44$
3. Pour un dipôle R-C , le déphasage ($\phi = -\arccos(0.44) = -1.1152\ rad$) entre tension et courant est donné par la relation :

$$\tan\phi = -\frac{1}{RC\omega} \Rightarrow C = -\frac{1}{R\omega\tan\phi} = 3.54\ \mu F$$

Montage

- Soit la figure ci-contre qui représente un circuit RLC alimenté par un générateur de tension sinusoïdal
- Sur les deux voies de loscilloscope on mesure la tension aux bornes du générateur et aux bornes de la résistance.

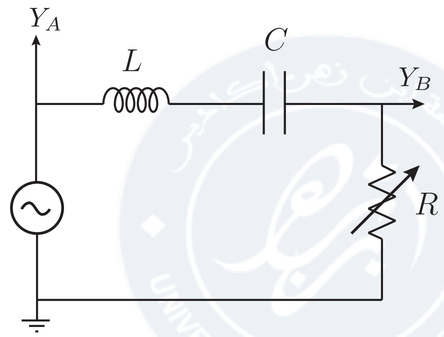


FIG: Circuit RLC

Fréquence de résonance

Observation

- Lorsque la fréquence varie, l'intensité du courant dans le circuit varie : elle augmente peu à peu, passe par un maximum pour une fréquence appelée fréquence de résonance f_0, puis diminue à nouveau.

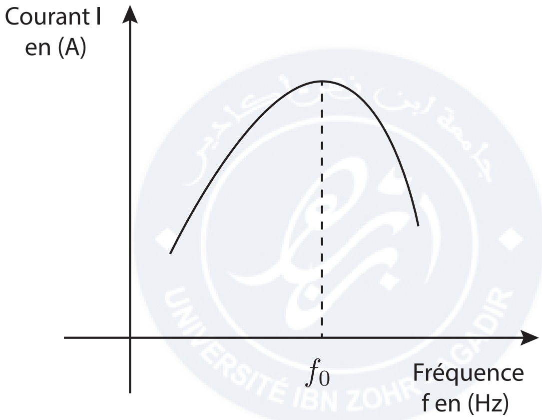


FIG: Courant en fonction de fréquence

RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT
└ Résonance

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Fréquence de résonance

Observation

- A la résonance, la tension aux bornes du circuit et le courant sont en phase; en mode bicourbe ou dual sur l'oscilloscope, les passages par zéro coïncident

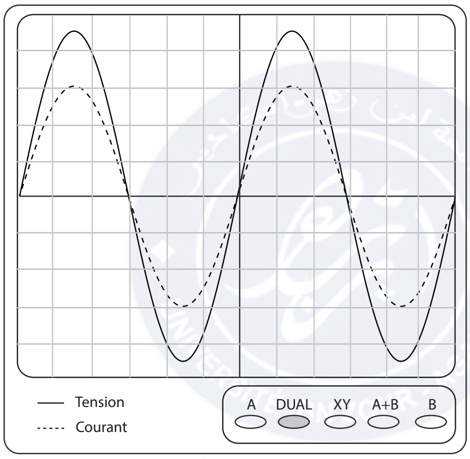


FIG: Mode dual

Fréquence de résonance

Observation

- En mode *XY*, à la résonance, la courbe de *Lissajous* observée est une droite passant par le centre de l'écran, si l'oscilloscope a été convenablement réglé au départ.
- La mesure de la fréquence de résonance est facile : dès que l'on s'écarte de la fréquence de résonance, la courbe devient une ellipse.

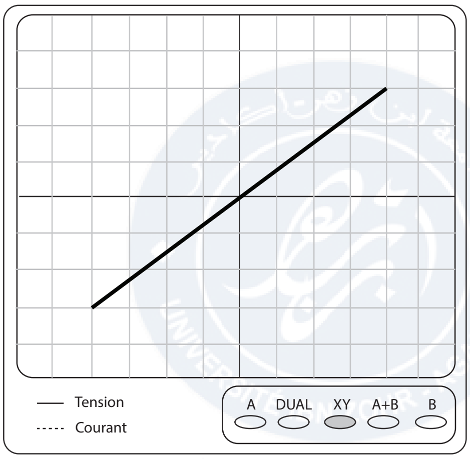


FIG: Mode XY

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Fréquence de résonance

Interprétation

La résonance correspond à un maximum d'intensité du courant, donc à une impédance minimale. Les trois dipôles en série ont pour impédances complexes :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \tag{1.50}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \tag{1.51}$$

D'où l'impédance du dipôle équivalent :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \tag{1.52}$$

Fréquence de résonance

Interprétation

lorsque les éléments qui composent le dipôle RLC vérifient la relation :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.53)$$

l'impédance du dipôle passe par la valeur minimum $Z = R$.

l'intensité est donc maximale et a pour amplitude $I_{max} = U_m/R$, où U_m est l'amplitude de la tension appliquée aux bornes du dipôle.

On dit qu'il y a **résonance en courant** dans le dipôle.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Bande passante

- Les fréquences pour lesquelles elle vaut $I = I_{max}/\sqrt{2}$ sont appelées fréquences de coupure. Pour le dipôle RLC série, il y a deux fréquences de coupure, l'une inférieure à f_0, l'autre supérieure. Ces fréquences sont notées f_{c1} et f_{c2}.

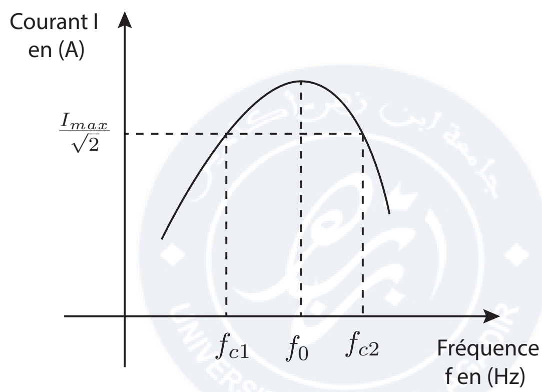


FIG: bande passante

Bande passante

Comme :

$$Z = |Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \tag{1.54}$$

si $Z = R\sqrt{2}$, on déduit que $R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$
Ce qui peut s'écrire :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \Rightarrow L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0 \tag{1.55}$$

dont les solutions positives sont :

$$\omega_{c1} = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad et \quad \omega_{c2} = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{1.56}$$

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Bande passante

- Le rapport : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c1} - \omega_{c2}} = \frac{f_0}{f_{c1} - f_{c2}}$ est appelé facteur de qualité ou sélectivité du circuit
- Ce rapport varie avec la résistance du dipôle RLC. En remplaçant ω_0, ω_{c1}, et ω_{c2} par leurs expressions en fonction de R, L, et C on obtient :

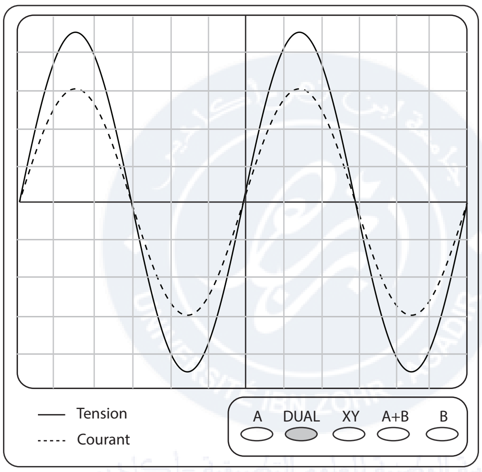
$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.57}$$

Étude de déphasage

- le déphasage entre la tension et courant pour un dipôle *RLC* série est :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \quad (1.58)$$

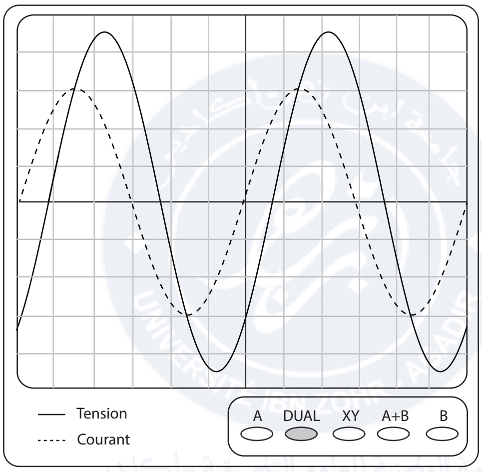
- à la résonance : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, donc $\phi = 0$. Par conséquent, la tension et courant sont en phase : le dipôle se comporte comme une résistance.



المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

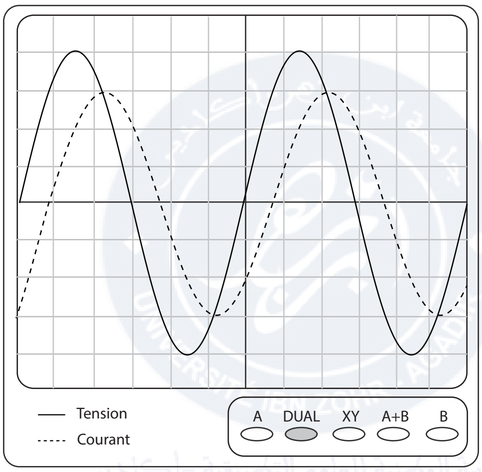
Étude de déphasage

- Pour des fréquences inférieures à la fréquence de résonance, un déphasage apparaît. $L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$, donc $\phi < 0$.
- Par conséquent, la tension est en retard de phase par rapport au courant
- Le dipôle se comporte comme un dipôle *RC*. Il est dit **"capacitif"**



Étude de déphasage

- Pour des fréquences supérieures à la fréquence de résonance, il y a aussi un déphasage. $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$, donc $\phi > 0$.
- Par conséquent, la tension est en avance de phase par rapport au courant
- Le dipôle se comporte comme un dipôle *RL*. Il est dit **"inductif"**



Exemple

Enoncé

Un circuit résonant *RLC* série est réalisé à l'aide d'un condensateur de capacité $C = 10\ nF$, d'une bobine de résistance $R_L = 8\ \Omega$ et d'inductance 200 mH, et d'un conducteur ohmique résistance $R_0 = 10\ \Omega$.

Calculer la fréquence de résonance et la sélectivité de ce circuit.

Exemple (suite..)

Solution

A la résonance

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

D'où la valeur de la fréquence de résonance $f_0 =$ **3.56 kHz**

La sélectivité du circuit RLC a pour expression :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le circuit comporte deux éléments résistifs : $R = R_0 + R_L$

D'où la valeur de la sélectivité du circuit : $Q =$ **248**